ENGENHARIA DIDÁTICA (ANÁLISES PRELIMINARES E ANÁLISE *A PRIORI*): O CASO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

DIDACTICAL ENGINEERING (PRELIMINARY AND A PRIORI ANALYSIS): THE SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Francisco Regis Vieira Alves *

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE.

Resumo: Reconhecidamente, determinados assuntos em Matemática, sobretudo àqueles do *locus* acadêmico, exigem um grau considerável de abstração mental. Assim, o presente manuscrito evidencia uma discussão sobre o uso do *design* de investigação garantido pela Engenharia Didática – ED, tendo em vista uma mediação do assunto Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem, assunto que exige habilidades cognitivas específicas do estudantes. O trabalho aborda as duas primeiras fases sistemáticas previstas pela ED, nominadas de análises preliminares e análise *a priori*, enfatizando a concepção de situações problema sobre a matéria, com arrimo de uma discussão afetada pelos momentos dialéticos da Teoria das Situações Didáticas – TSD. Indica ainda a exploração do *software GeoGebra*, tendo como escopo evidenciar certos elementos heurísticos e intuitivos, no contexto da resolução de problemas de equações do tipo $\mathrm{x}''+px'+qx=\mathrm{f(t)}$, com $p,q\ (cte)$. Dessa forma, sob a influência do pensamento de Figueiredo & Neves, enfatiza um ensino que coloca em discussão um conhecimento que não se restringe a um modelo de ensino formalista ortodoxo e indefectível que se manifesta na academia.

Palavras-chave: Engenharia Didática, Equações Diferenciais Ordinárias, Ensino, Visualização.

Abstract: Admittedly, certain subjects in Mathematics, especially those of the academic locus that require a considerable degree of mental abstraction. Thus, this manuscript shows a discussion about the use relatively an investigation´s design guaranteed by the Didactical Engineering – ED, regarding a subject of Ordinary Differential Equations of second order, which requires specific cognitive student´s abilities. The paper addresses the first two systematic phases provided by the ED, nominated preliminary and a priori analysis, emphasizing the design of problem situations originating in this subject, with the help in a discussion provided by the dialectical moments of the Theory of Didactical Situations – TSD. It also shows the exploitation of GeoGebra software, with the scope to highlight certain heuristic and intuitive elements in the context of solving equations of the class $\mathrm{x}''+px'+qx=\mathrm{f(t)}$, com $p,q\ (cte)$. Thus, under the influence of thought Figueiredo & Neves, it highlights in discussion a knowledge that is not restricted to a orthodoxal formalist style of teaching that manifests in the academic locus.

Keywords: Didactical Engineering, Ordinary Differential Equations, Teaching, Visualization.

* fregis@ifce.edu.br

1. Introdução

No *locus* acadêmico, deparamos dificuldades enfrentadas pelos estudantes, relativamente a um extenso repertório de assuntos no âmbito da Matemática Avançada. Neste rol, assinalamos o contato dos estudantes com o conteúdo de Equações Diferenciais Ordinárias – EDO que, de modo *standard*, transcorre depois do contato e certa familiaridade compulsória adquirida com a teoria das funções em uma variável real e, algum tempo depois (anos depois), com a teoria das funções em várias variáveis.

Encontramos considerável quantidade de estudos e investigações, no âmbito do ensino e da aprendizagem das EDO´s, dando conta dos entraves e obstáculos específicos condicionados, também, pelos rituais ortodoxos de mediação didática, que encontramos na academia, que tendem a tornar hegemônico o caráter formal, logicizante e estrutural de uma teoria que, do ponto de vista histórico (e prosaico), envolve a determinação de primitivas.

Por outro lado, a vertente francófona da Didática da Matemática, desde a década de 80, buscou envidar o esforço de especialistas, no sentido de compreender os fenômenos relacionados com o ensino e aprendizagem de certos assuntos matemáticos, inclusive, àqueles estudados na universidade. Como consequências, observamos a evolução de teorias que buscaram tornar controlável, reprodutível e previsível, determinadas transposições didáticas e/ou abordagens estruturadas de ensino. Assim, na vertente nominada por Didática da Matemática, encontramos teorias como a Engenharia Didática – ED e a Teoria das Situações Didáticas – TSD que, em caráter de complementaridade, tem proporcionado o acúmulo de conhecimentos científicos e metodológicos sobre determinados assuntos científicos.

Ademais, do ponto de vista do objeto matemático em discussão, não podemos desconsiderar algum conhecimento sobre as propriedades gerais das equações, teoremas clássicos como, por exemplo, o teorema sobre a existência e a unicidade de solução para o Problema de Valor Inicial – PVI, que proporciona um sólido fundamento para a resolução do problema da obtenção da solução de equações diferenciais, embora, tenhamos que reconhecer “a impossibilidade de resolver a maior parte das equações, em forma explícita” (FIGUEIREDO & NEVES, 2002, p. 49).

Isso posto, nas seções subsequentes, indicamos ao leitor a necessidade de alguma familiaridade com as propriedades do seguinte sistema $\{y' = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{y}(\mathrm{x}_0) = y_0$ (FIGUEIREDO & NEVES, 2002, p. 51), bem como um outro sistema formal $\{\mathrm{x}''(\mathrm{t}) + \mathrm{p}(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{x}'(\mathrm{t}) + \mathrm{q}(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{t}), \mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = x_0, \mathrm{x}'(\mathrm{t}_0) = v_0$ (FIGUEIREDO & NEVES, 2002, p. 94). Por outro lado, vamos considerar a seguinte equação diferencial de 2ª ordem $\mathrm{y}'' + 4y' + 5y = \mathrm{f}(\mathrm{x})$. E, seguindo o tirocínio imprimido por Figueiredo & Neves, escreveremos ainda $(D^2 y + 4Dy + 5\mathrm{y}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{D} = (d/dx)$. Ora, os autores comentam que “seria ótimo se pudéssemos resolver essa equação, como se ela fosse uma equação algébrica, e escrever $D^2 y + 4Dy + 5\mathrm{y} = (D^2 + 4D + 5) \cdot y(x)$ e, logo em seguida, isolam o termo $\mathrm{y}(\mathrm{x}) = f(x)/(D^2 + 4D + 5)$. Pouco mais adiante, Figueiredo & Neves (2002, p. 180) comentam que: “Infelizmente, isso não faz sentido!”.

Não obstante, os autores acentuam uma perspectiva imprescindível para a evolução do entendimento nessa teoria. Com efeito, completam que, na simplicidade do raciocínio anterior, implementado no contexto de discussão da Transformada de Laplace, podemos "tomar uma atitude persistente e procurar extrair algo do raciocínio acima. Nosso esforço deve ser na direção de algebrizar a equação diferencial, de algum modo" (FIGUEIREDO & NEVES, 2002, p. 180). E, finalmente, os autores se empenham em transmitir ao leitor um tirocínio heurístico e metafórico, envolvido com a transformada, ao comentarem que:

> *A transformada por ser entendida como uma "caixa". No lado esquerdo, a seta representa a função que entra na caixa, e no lado direito, a seta, no mesmo nível, representa a função correspondente que sai da caixa, após ser operada ou transformada. A lei matemática que rege a operação (a transformada de Laplace) será definida na próxima seção*.

Ora, com origem nos elementos mencionados nos parágrafos passados, dois aspectos ensejamos acentuar. O primeiro possui lugar invariante na ortodoxia usual para a abordagem formal de conceitos, no âmbito acadêmico que, de modo radicalizado, costuma transmitir um pensamento algebrizante para os aprendizes. Mas, relativamente ao segundo aspecto, perspectivamos, inclusive, a necessidade, com fins no entendimento e maior significado, de um viés heurístico e intuitivo, vinculado e agregado a determinados conceitos e "objetos metafóricos" que, apesar de não constituírem, de *per si*, um conhecimento matemático científico, proporcionam a evolução e o estabelecimento de teorias (CHOQUET, 1963). Doravante, restringir-nos-emos ao caso das Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem.

2. Equações Diferenciais de 2ª Ordem

Como bem mencionamos, na seção anterior, o assunto Equações Diferenciais Ordinárias, constitui assunto que proporciona dificuldades e entraves, tanto ao ensino, bem como ao entendimento dos incipientes na matéria. Com efeito, recordamos as advertências de Figueiredo & Neves (2002, p. 6) quando, ao comentar o estádio do ensino do referido conteúdo, advertem que "muito se fala sobre problemas, em cursos de Matemática. Muito pouco se diz sobre a origem desses problemas e do que fazer com as respostas".

Ora, Figueiredo & Neves levam em consideração os problemas fundamentais que concorreram para a constituição de uma área de investigação em Matemática Pura, como também, preocupações com a frente de ensino, no *locus* acadêmico. Dessa forma, dois elementos ensejamos demarcar na seção atual. *In primo impetu*, indicar o terreno epistêmico e matemático de nosso interesse e a proposição de um percurso investigativo. Logo em seguida, uma breve apreciação dos problemas no âmbito do ensino de EDO´s.

Isso posto, a classe das equações de nosso interesse são do tipo $x''+px'+qx=0$, aonde os coeficientes $p,q=ctes$. Assim, tendo em vista um teorema que prevê o comportamento da solução (que pode ser única) do sistema $\{\mathrm{x''(t)+p(t)\,x'(t)+q(t)\,x(t)=f(t), x(t_0)}=x_0, \mathrm{x'(t_0)}=v_0$, suas soluções serão funções definidas em toda a reta. Figueiredo & Neves (2002, p. 102) comentam que o método consiste em buscar soluções para a equação $x''+px'+qx=0$, do tipo $x(t)=e^{\lambda t}$, onde λ é um parâmetro a determinar. Ora, "se quisermos que $x(t)$ seja solução da equação, nada há de mais razoável do que leva-la à equação: $x''(t)+px'(t)+qx(t)=0$". E, portanto, vemos $\lambda^2\cdot e^{\lambda t}+p\lambda\cdot e^{\lambda t}+q\cdot e^{\lambda t}=0\leftrightarrow e^{\lambda t}\cdot\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)=0$. Ora, a igualdade, permite estabelecer que $\lambda^2+p\cdot\lambda+q=0$, conhecida como equação característica ou auxiliar.

Antes, porém, recordamos que a noção do Wronskiano de duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ ou, de modo geral, de duas funções quaisquer. De modo *standard*, denotá-lo-emos por $W\left[x_1,\mathrm{x}_2\right](t)$, cujo determinante fica definido pela expressão $[x_1(t)\cdot x_2'(t)-x_2(t)\cdot x_1'(t)]$. O Wronskiano se presta ao expediente que permite prever se as soluções são Linearmente Dependentes – LD $\left(W\left[x_1,\mathrm{x}_2\right](t)=0\right)$ ou Linearmente Independentes – LI $\left(W\left[x_1,\mathrm{x}_2\right](t)\neq 0\right)$. Logo abaixo, apenas enunciaremos um teorema garantidor dos nossos argumentos e sugerimos ao leitor uma apreciação de sua abordagem em outros compêndios especializados (EDWARDS & PENNEY, 2008; POLYANIN & ZAITSEV, 1995)

Teorema: Sejam duas soluções $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ da equação $x''+px'+qx=0$. Então, são LI (linearmente independentes) se, e somente se, seu Wronskiano é diferente de zero, num ponto $t_0\in(a,b)$. Além disso, se o Wronskiano for diferente de zero em um ponto, então será diferente de zero em todos os demais pontos de $t\in(a,b)$. Demonstração: Ver Figueiredo & Neves (2002, p. 97).

Por outra via, dizemos apenas que as soluções são LD (linearmente dependentes). Feita esta pequena digressão sobre a noção fundamental do Wronskiano, logo em seguida, observamos que as soluções da equação $\lambda^2+p\cdot\lambda+q=0$ são descritas por $\lambda_1=-p+\sqrt{p^2-4q}\big/2$ e $\lambda_2=-p-\sqrt{p^2-4q}\big/2$. Assim, temos de tratar, pois, três casos: (i) $p^2-4q>0$; (ii) $p^2-4q=0$; (iii) $p^2-4q<0$. Ora, facilmente, no primeiro caso, teremos duas soluções esperadas do tipo $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}=\exp(-p+\sqrt{p^2-4q}\big/2)t$ e $x_2(t)=e^{\lambda_2 t}=\exp\left(-p-\sqrt{p^2-4q}\big/2\right)t$. Ora, podemos verificar ainda que $W\left[x_1,\mathrm{x}_2\right](t)=\left(e^{\lambda_1 t}\cdot\lambda_2 e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_2 t}\cdot\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\right)=(\lambda_2-\lambda_1)\cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\neq 0$, para todo $t\in IR$. Portanto, as soluções $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}$ e $x_2(t)=e^{\lambda_2 t}$ são LI, de acordo com o teorema anterior!

No caso (II), teremos $p^2-4q=0\therefore\lambda_1=-p+0/2=-p/2$ e, desse forma, esperamos que $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}=e^{-tp/2}$. Por outro lado, Figueiredo & Neves (2002, p. 109) questionam: Como determinar uma outra solução $x_2(t)$, de modo que o par $x_1(\mathrm{t})$ e $x_2(t)$ seja LI?

A ideia, segundo os autores, envolve o método da redução da ordem da equação que consiste no seguinte: conhecida uma solução $x_1(t)$, da equação $x''+px'+qx=0$, busca-se outra solução da forma $x_2(t)=u(\mathrm{t})\cdot x_1(t)=\mathrm{u(t)}\cdot e^{-tp/2}$. Ora, substituiremos na equação anterior e, vem que $x_2''(t)+px_2'(t)+qx_2(t)=0\leftrightarrow\left(u(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)''+p\left(u(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)'+q\left(u(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)=0$. Mas, aqui, tendo em vista o escopo do compêndio que tomamos como referência, alguns cálculos cifrados e/ou omitidos são deixados a cargo do leitor (ou para o aluno).

Não obstante, constatamos que devem ocorrer as seguintes expressões analíticas: $\left(u(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)'=\left(u'(\mathrm{x})\cdot x_1(t)+u(\mathrm{x})\cdot x_1'(t)\right)'=u''(\mathrm{x})\cdot x_1(t)+2u'(\mathrm{x})\cdot x_1'(t)+u(\mathrm{x})\cdot x_1''(t)$ (*), $p\left(u(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)'=p\cdot u'(\mathrm{x})\cdot x_1(t)+p\cdot u(\mathrm{x})\cdot x_1'(t)$ (**) e $q\cdot u(\mathrm{x})\cdot x_1(t)$ (***).

No próximo passo, agruparemos as expressões que indicamos por (*), (**), e (***). Usaremos ainda o fato de que $\mathrm{x}_1(\mathrm{t})''+\mathrm{px}_1(\mathrm{t})'+q\,\mathrm{x}_1(\mathrm{t})=0$. Isso posto, vejamos

$$\left(u''(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)+\left(u(\mathrm{x})\cdot x_1''(t)+p\cdot u(\mathrm{x})\cdot x_1'(t)+q\cdot u(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)+\left(2u'(\mathrm{x})\cdot x_1'(t)+p\cdot u'(\mathrm{x})\cdot x_1(t)\right)=$$
$$=u(\mathrm{x})\cdot\left(x_1''(t)+p\cdot x_1'(t)+q\cdot x_1(t)\right)+(u''(\mathrm{x})\cdot x_1(t))+u'(\mathrm{x})\cdot\left(2\cdot x_1'(t)+p\cdot x_1(t)\right)=$$
$$=u(\mathrm{x})\left(0\right)+(u''(\mathrm{x})\cdot x_1(t))+u'(\mathrm{x})\cdot\left(2x_1'(t)+p\cdot x_1(t)\right)=u''(\mathrm{x})\cdot x_1(t)+u'(\mathrm{x})\cdot\left(2x_1'(t)+p\cdot x_1(t)\right).$$

Agora, vejamos que $u''(x)\cdot x_1(t)+u'(x)\cdot\left(2x_1'(t)+p\cdot x_1(t)\right)=0$ e, efetuando a seguinte substituição $u'(t)\underset{x_1(t)\neq 0}{=}v(t)\therefore u''(t)=v'(t)$ teremos ainda a seguinte expressão $v'\cdot x_1(t)+v\left(p\cdot x_1(t)+2\cdot x_1'(t)\right)=0 \leftrightarrow v'+[p+2x_1'(t)/x_1(t)]=0$. Ora, vejamos que a seguinte expressão analítica $(p+2x_1'(t)/x_1(t))$ que comparece é nula!. De fato, desde que $x_1(t)=e^{-(p/2)t}\therefore x_1'(t)=-p/2e^{-(p/2)t}=(-p/2)x_1(t)\leftrightarrow x_1'(t)+(p/2)x_1(t)=0\leftrightarrow 2x_1'(t)+p\cdot x_1(t)=0$, ou ainda que $[p+2x_1'(t)/x_1(t)]=0$. Então, inferimos que $\leftrightarrow v'(t)+[0]=0\therefore v(t)=c(cte)$. Mas, desse modo, obtivemos que $u'(t)=v(t)=c\rightarrow u(t)=ct+c'$. Figueiredo & Neves (2002, p. 109), a partir dos dados anteriores, comentam que "qualquer função da forma $(ct+c')\cdot x_1(t)$, onde c e c' são constantes, é solução de $x''(t)+px'(t)+qx(t)=0$".

Neste ponto, os autores escolhem, de modo arbitrário, os valores particulares $c=1,c'=0\therefore x_2(t)=t\cdot x_1(t)$. E, de modo imediato, podemos checar o comportamento do Wronskiano das soluções (LI) ora obtidas, e verificar, também, que $W[x_1,x_2](t)=e^{-(p/2)t}\left(e^{-(p/2)t}-(p/2)te^{-(p/2)t}\right)+te^{-(p/2)t}(p/2)e^{-(p/2)t}=e^{-pt}-e^{-(p/2)t}(p/2)te^{-(p/2)t}$ $+te^{-(p/2)t}(p/2)e^{-(p/2)t}=e^{-pt}+0=e^{-pt}\neq 0$, $\forall t\in IR$.

Por fim, no caso (iii) $p^2-4q<0$, esperamos identificar duas raízes complexas da equação $\lambda^2+p\lambda+q=0$. E, estabelecemos os valores $\lambda_1=-\mu+iv$ e $\lambda_2=-\mu-iv$, em que $\mu=(p/2),v=(1/2)\sqrt{4q-p^2}$. De fato, podemos observar que $\lambda_1=\left(-p+\sqrt{p^2-4q}\right)/2=\left(-p+\sqrt{(-1)(4q-p^2)}\right)/2=-(p/2)+\left(\sqrt{(4q-p^2)}/2\right)i=-\mu+iv$. E, de modo semelhante, repetimos o argumento para a segunda raiz $\lambda_2=\left(-p-\sqrt{p^2-4q}\right)/2=\left(-p-\sqrt{(-1)(4q-p^2)}\right)/2=-(p/2)-\left(\sqrt{(4q-p^2)}/2\right)i=-\mu-iv$.

Desse modo, Figueiredo & Neves (2002, p. 103) consideram as seguintes raízes, no presente caso, que indicamos $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}=e^{-(p/2)t+t\left(\sqrt{(4q-p^2)}/2\right)i}=e^{-(p/2)t}e^{t\left(\sqrt{(4q-p^2)}/2\right)i}=e^{-\mu t}\cdot e^{t\cdot vi}$. Enquanto que, a segunda raiz, poderá ser entendida como $x_2(t)=e^{\lambda_2 t}=e^{-(p/2)t-t\left(\sqrt{(4q-p^2)}/2\right)i}=e^{-(p/2)t}e^{-t\left(\sqrt{(4q-p^2)}/2\right)i}=e^{-\mu t}\cdot e^{-t\cdot vi}$. E, seguindo o roteiro de verificação formal anterior, seu Wronskiano deve ser o seguinte $W[x_1,x_2](t)=$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t)\\ x_1'(t) & x_1'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-\mu t}\cdot(\cos(tv)+isen(tv)) & e^{-\mu t}\cdot(\cos(tv)-isen(tv))\\ -\mu e^{-\mu t}\cdot e^{t\cdot vi}+e^{-\mu t}\cdot(-\mathrm{v}sen(tv)+vi\cos(tv)) & -\mu e^{-\mu t}\cdot e^{-t\cdot vi}+e^{-\mu t}\cdot(-\mathrm{v}sen(tv)-vi\cos(tv))\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-\mu t}\cdot e^{t\cdot vi} & e^{-\mu t}\cdot e^{(-t\cdot v)i}\\ -\mu e^{-\mu t}\cdot e^{t\cdot vi}+ve^{-\mu t}\cdot(-\mathrm{sen}(tv)+i\cos(tv)) & -\mu e^{-\mu t}\cdot e^{-t\cdot vi}-ve^{-\mu t}\cdot(\mathrm{sen}(tv)+i\cos(tv))\end{pmatrix}$$

$$-\mu e^{-\mu t}\cdot e^{-t\cdot vi}\cdot e^{-\mu t}\cdot e^{t\cdot vi}-ve^{-\mu t}\cdot(\mathrm{sen}(tv)+i\cos(tv))\cdot e^{-\mu t}\cdot e^{t\cdot vi}-e^{-\mu t}\cdot e^{(-t\cdot v)i}\left(ve^{-\mu t}\cdot(-\mathrm{sen}(tv)+i\cos(tv))-\mu e^{-\mu t}\cdot e^{t\cdot vi}\right)$$

$$=-\mu e^{-2\mu t}-v\cdot(\mathrm{sen}(tv)+i\cos(tv))\cdot e^{t\cdot vi}-ve^{-2\mu t}\cdot e^{(-t\cdot v)i}(-\mathrm{sen}(tv)+i\cos(tv))+\mu e^{-2\mu t}$$

$=-v\left(e^{tvi}\right)\cdot e^{t\cdot vi}-ve^{-2\mu t}\cdot e^{(-t\cdot v)i}\left(e^{tvi}\right)=-v\left(e^{tvi}\right)\cdot e^{-t\cdot vi}-ve^{-2\mu t}=e^{-2\mu t}\neq 0$. Reparemos que a última expressão nunca se anulará, para algum valor $t\in IR$.

Por outro lado, Figueiredo & Neves recordam as seguintes relações: $\phi_1(x)=(x_1(t)+x_2(t))/2=\left(e^{-\mu t}\cdot e^{tvi}+e^{-\mu t}\cdot e^{-tvi}\right)/2=e^{-\mu t}\cdot\left(\left(e^{tvi}+e^{-tvi}\right)/2\right)=e^{-\mu t}\cdot\cos(vt)$, $\phi_2(x)=(x_1(t)+x_2(t))/2i=\left(e^{-\mu t}\cdot e^{tvi}+e^{-\mu t}\cdot e^{-tvi}\right)/2i=e^{-\mu t}\cdot\left(\left(e^{tvi}+e^{-tvi}\right)/2\right)=e^{-\mu t}\cdot sen(vt)$. E, pelo princípio da superposição (POLYANIN & ZAITSEV, 1995), o par $\{\phi_1(x),\phi_2(x)\}$ constituem também soluções da equação $x''(t)+px'(t)+qx(t)=0$. Nesse caso, podemos, ainda, verificar o comportamento do Wronskiano $\left(W\left[\phi_1,\phi_2\right](t)\neq 0\right)$ correspondente dessas soluções.

Para concluir a presente seção, uma vez que demarcamos nosso objeto matemático de interesse, nos resta ainda perspectivar seu cenário de ensino nas academias. Antes, porém, cabem as profícuas considerações de Figueiredo & Neves, ao registrarem que

> *O aparecimento de números complexos a essas alturas dá o que pensar. Em primeiro lugar, pelo modo de conduzir nossa apresentação até este ponto ficou implícito que estávamos trabalhando apenas com números reais, e, de fato, era isso que tínhamos em mente. Entretanto, podemos tratar de modo análogo equações diferenciais lineares com coeficientes complexos,* $p,q:(a,b)\rightarrow\mathbb{C}$ e falar de soluções complexas $\phi:(a,b)\rightarrow\mathbb{C}$, aonde $\mathbb{C}$ designa o corpo dos números complexos.

As considerações do excerto anterior nos permitirão extrair dois ensinamentos. O primeiro, de ordem metodológica, uma vez que, na abordagem dos autores, num compêndio de Matemática Pura, o discurso propugnado pelos autores poderia encobrir/esconder determinadas relações conceituais, notadamente com uma extensão natural ao campo dos complexo. O segundo, resgatando um tirocínio metafórico desenvolvido na seção preliminar, no contexto das considerações relacionadas com a transformada de Laplace, nos informa o caráter profícuo de uma significação heurística, metafórica e intuitiva para certos conceitos.

Senão, vejamos, na figura 1, Junior indica a manifestação de uma *cáustica*, termo que, oriundo do grego, quer dizer "queima". Junior (2005, p. 5) observa que "todos os raios refletidos são sempre tangentes à cáustica". Todavia, o leitor pode estar se perguntando que relações ocorrem entre o nosso atual assunto de discussão e uma cáustica? A resposta é que, do ponto de vista físico e matemático, "os raios luminosos emitidos por uma fonte L, refletem num espelho M, e originam uma cáustica, por reflexão" (JUNIOR, 2005, p. 11). Sua envoltória é originada pela família de raios refletidos. Pouco mais adiante, quando menciona a definição de uma envoltória, Junior acrescenta que "outras definições intuitivas, mas um pouco mais formais, como o limite das intersecções das curvas das famílias próximas ou [...] a curva tangente às curvas da família".

Agora, do ponto de vista matemático, deparamos o seguinte problema clássico: Dada uma família de curvas a um parâmetro, existe uma equação diferencial para a qual essa família representa uma solução? A resposta de tal questionamento é positiva e, podemos agora relacionar a imagem que divisamos na figura 1 com a nossa teoria das EDO´s. Além disso, temos indícios, a partir das palavras encorajadoras de Figueiredo & Neves, de modo aliar o formalismo peculiar e tradicional desta teoria, como outros elementos, cuja natureza, extrapola os limites da própria Matemática podendo concorrer, inclusive, nos processos de aprendizagem. Não obstante, um binômio sempre merecedor de atenção constante diz respeito ao ensino-aprendizagem (ALVES, 2012).

E, no contexto das investigações sobre seu ensino, alguns autores chamam atenção de que, parte dos entraves que se manifestam no ensino da derivada, sobretudo, incompreensão por parte dos alunos, pode ser refletir no contexto do ensino e aprendizagem das EDO´s (ARTIGUE, 1989; CAMACHO-MARTIN; PERDOMO-DÍAZ & SANTOS-TRIGO, 2012; ROWLAND & J0VANOSKI, 2004; TESTARD, 2004). Rasmussen (1998) alerta sobre as dificuldades dos estudantes com a noção de solução de uma EDO, tendo em vista que, suas soluções são associadas ainda a noção de espaço vetorial, formado por funções, e não por valores numéricos (DÍAZ, 2011, p. 30).

Ademais, Rasmussen (2001, p. 56) comenta ainda que “embora as técnicas analíticas para a determinação das soluções fechadas de uma equação diferencial constituam abordagem dominante, a maior parte delas” não pode ser resolvida.

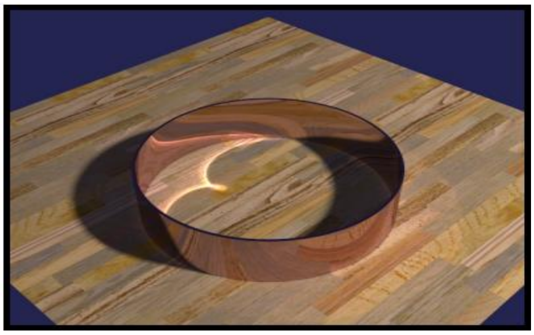

Figura 1. Junior (2005) discute uma significação heurística e intuitiva do conceito de cáustica, produzido por uma família de curvas e intimamente relacionado com a noção de EDO´s.

Em outros trabalhos, como na tese de Díaz (2011, p. 270), comenta que “a introdução do conceitos de EDO a partir de sua relação com a derivada de uma função, estabelece uma ponte entre os conceitos e, ademais, na construção de um conceito matemático novo [...]”. Em outra tese de doutorado sobre o ensino de equações diferenciais, Moreno Gordillo (2006), desenvolveu um estudo em torno das dificuldades dos estudantes, em nível avançado, na elaboração de ligações conceituais entre as representações gráficas e representações simbólicas entre certos objetos teóricos E, para colocar em processo de perquirição de suas hipóteses, extraídas no âmbito do ensino das EDO´s, Moreno Gordillo (2006, p. 36) elege, como metodologia de pesquisa, o quadro conceitual da Engenharia Didática – ED, semelhantemente, ao que constatamos, também, na tese de Rodriguez (2007).

Outro exemplo de investigação que se apoiou nos pressupostos da ED, é o caso da tese de Arslan (2005). No seu estudo preliminar histórico, Arslan identificou os quadros de ordem algébrica, de ordem numérica e de ordem geométrica, quando leva em consideração os método de resolução de equações diferenciais ordinárias. Assim, ao eleger a teoria dos registros e concepções de Balacheff (1995), nas suas conclusões, o autor salienta os valores pedagógicos para uma abordagem “qualitativa das EDO´s”. Não obstante, constatou, a partir de uma análise dos manuais programáticos, forte hegemonia do trato algébrico no ensino das mesmas. E, em outra investigação (ARSLAN, 2010), numa incursão desenvolvida com a participação de 77 sujeitos, Arslan discute o caso da abordagem procedural e a abordagem conceptual. No primeiro caso, o autor critica as habilidades dos estudantes que permanecem restritas ao domínio de manipulações e aplicação de técnicas algébricas.

Ora, o cenário anterior, das investigações sobre as EDO´s nos permitirão, na seção subsequente, a adoção de um design de investigação científica, controlada e sistematizada, afim de compreender determinados problemas e entraves no âmbito do ensino das EDO´s, posto que, referendados pelos relatos anteriores, realmente existem e carecem de vigilância. Dessa forma, de modo tradicional, realizaremos o primeiro passo de uma ED, isto é, a identificação de entrave ou problema, de natureza próxima ao ensino e/ou aprendizagem.

3. Engenharia Didática - ED

Do ponto de vista do *design* de investigação adotado, assumimos a sistemática prevista pela ED (ARTIGUE, 1995; 1996; 2009). Oriundo de uma vasta tradição acadêmica da vertente francófona (ARSLAN, 2005; ARSLAN & LABORDE, 2003; BLOCH, 2006; DOUADY, 1995a; 1995b; LABORDE, 1997; MARGOLINAS, 2004; SAGLAM, 2004; ROBERT, 1983; ROBINET, 1983), sabemos que a concepção de pesquisa em Engenharia Didática - ED compara a forma de trabalho didático do professor com a maneira de trabalho do engenheiro que, para realizar projetos, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio (ARTIGUE, 1996, p. 243). Ademais, no que concerne aos momentos ou fases da investigação, distinguimos: as análises preliminares, analises *a priori*, a etapa da experimentação e introdução ao movimento de todo o aparato metodológico construído, *validação* e análises *a posteriori*. Por outro lado, restringir-nos-emos aos primeiros dois momentos previstos por Artigue (1996), qual sejam, as análises preliminares e análise *a priori*.

Podemos vislumbrar a relevância dessa perspectiva *sui generis* de análise e investigação dos problemas envolvendo o binômio ensino-aprendizagem, quando observamos Brousseau (1989, p. 14) ao mencionar que "o matemático não comunica seus resultados sob a forma que eles o encontra; ele os organiza, ele os fornece uma forma mais geral possível, ele desenvolve uma 'didática prática' que consiste em colocar o saber sobre forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada e destemporalizada". Entretanto, no âmbito do ensino, deparamos um caráter antagonista (MARGOLINAS, 1995, p. 343) ao fato indicado no excerto anterior. Com efeito, na frente do ensino, registramos um trabalho no sentido inverso, posto que o professor deverá recontextualizar e repersonalizar o saber científico, isto é, realizar uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991) eficiente e planejada.

Cabe observar que "a didática não consiste em fornecer um modelo para o ensino, mas produzir um campo de conhecimentos e de questões que permitem colocar em prova qualquer situação de ensino e que permita corrigi-la e melhorá-la [...]" (BROUSSEAU, 1989, p. 16). Com arrimo nas reflexões de Brousseau, constatamos alguns dos interesses da Didática da Matemática. Por outro lado, vemos que, em seu estágio embrionário, a mobilização científica de estudiosos começou ainda nos anos 60, "diante de uma crise social muito forte em torno da Matemática" (DOUADY, 1995, p. 3), ainda com forte influência do estilo bourbaki (CHOQUET, 1963; STILLWELL, 1997).

Todavia, como todo processo de organização envolvendo grupos humanos em torno de um determinado saber, sua visibilidade maior ocorreu nos anos 80, mais precisamente a partir de 1977, como indicado por Douady (1995, p. 4). Brousseau (1994, p. 52) explica tal processo produtivo quando menciona:

> *A Didática da Matemática nasceu do interesse mobilizado nos anos 60 relativamente aos meios de melhorar o ensino de Matemática, e do orgulho de encontrar seus meios em*

> *estudos científicos apropriados. Como campo científico, ela deve acolher toda sorte de declarações e prescrições originadas de um enorme campo de disciplinas com a qual possui uma fronteira quase fractal.*

Por isso, podemos depreender que a Didática da Matemática possui um terreno epistêmico intimamente condicionado pelo saber matemático. E, por intermédio de um movimento dialético, característico de sua evolução e sistematização, divisamos um *corpus* teórico que parte da Matemática, adquire uma robustez científica e tem capacidade de voltar a se aderir, mais uma vez, à Matemática e, todavia, “não garante uma perspectiva similar aplicacionista em outros campos de saberes científicos” (MARGOLINAS, 2004, p. 4). Com efeito, “a Didática da Matemática se insere num quadro das ciências cognitivas como as ciências de condições específicas na difusão dos conhecimentos matemáticos utilizados no funcionamento das instituições humanas” (BROUSSEAU, 1994, p. 53).

Para concluir, seguindo um roteiro metodológico dos estudos que discutimos em torno do ensino das EDO´s nas seções passadas, assumiremos, como metodologia de ensino, a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas – TSD cunhada, de modo preliminar, na tese de Brousseau (1986). Assim, de modo simplificado, recordamos que: (i) situação de ação em que são consideradas toda a sorte de declarações dos estudantes; (ii) situação de formulação entendida sem ainda o debate científico em torno de uma prova ou demonstração; (iii) situação de validação envolvendo a testagem do modelo matemático em discussão (BROUSSEAU, 1986, p. 347). E, por fim, a (iv) situação de institucionalização em que os conhecimentos oficiais institucionalizados são indicados pelo *expert* e incorporados ao esquemas mentais dos alunos (AUMOULOUD, 2007, p. 40).

Na tradição da vertente francófona, registramos uma profusão de trabalhos que empregam, numa perspectiva sistemática de investigação, a ED associada a TSD. Dessa forma, antes de deflagrarmos a seção seguinte, prevista pela ED, elegemos a seguinte questão problematizadora: A partir de uma mediação fundamentada nos pressupostos da TSD, de que forma podemos estimular nos estudantes, a produção de um conhecimento relacionado com Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem, cuja natureza extrapola os limites dos modelos e cânones formais da Matemática?

Apesar de não ensejarmos sua verificação empírica, indicamos a seguinte hipótese: A tecnologia pode auxiliar o professor na promoção e na dialética do debate, com os estudantes, em torno de situações problemas no contexto das EDO´s de segunda ordem. E, tendo em vista a atenção do pesquisador em adotar uma hipótese investigativa em que não exigimos extenso período temporal envolvendo um acompanhamento prolongado dos estudantes, propugnamos que a mesma pode ser verificada/analisada ao decurso de poucas seções de experimentação na ED (MARGOLINAS, 2004).

4. Análises Preliminares

De modo sistemático, conforme Artigue (1995a, p. 249-250), nesta etapa consideramos: uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino (indicado na seção anterior); análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática;

exame das concepções e conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados) e seus efeitos. Por fim, todos os elementos anteriores levam em consideração os objetivos que indicamos na seção precedente.

Não obstante, na seção 2, abordamos os dados, com destaque para alguns estudos acadêmicos que apontam elementos merecedores de atenção, a saber: o caráter hegemónico de algoritimização e aplicação irrefletida de técnicas de resolução de EDO´s. Ademais, os autores de livros consultados (DOERING & LOPES, 2012; VILCHES, 2009), apesar de acentuarem um entendimento qualitativo (intuitivo) para a teoria fundante acabam, no final das contas, na proposição de exercícios rotineiros que proporcionam, em maior ou menor substancia, a memorização de regras formais em detrimento de um entendimento conceitual.

Tendo em vista que o presente trabalho não enseja a discussão de dados empíricos, a análise das concepções dos estudantes pode ser apreciada a partir do relato de investigações desenvolvido no âmbito do ensino das EDO´s, colhidos no rol dos estudos realizados na academia (ARSLAN, 2005; DIAZ, 2011). Assim, para concluir a presente seção e, levando em consideração a última questão problematizadora, lançamos as seguintes hipóteses de trabalho: (a) O quadro gráfico-geométrico proporciona, no âmbito do ensino das equações diferenciais ordinárias a identificação e distinção de classes de equações da 2ª ordem; (b) O *software GeoGebra* proporciona um entendimento dinâmico e conceitual para o conjunto de soluções de uma EDO; (c) O *software GeoGebra* proporciona um entendimento conceitual da noção de dependência e independência linear do conjunto de soluções de uma EDO.

Antes de darmos continuidade ao nosso trabalho, cabem algumas justificativas que proporcionaram a eleição das hipóteses anteriores. De modo preliminar, temos assumido o caráter imprescindível do papel da visualização, tendo em vista o ensino e aprendizagem dos objetos que temos descrito pela equação $x''+px'+qx=0$ (coeficientes contantes). Ademais, no contexto do ensino atual, assumimos as potencialidades do *software GeoGebra*, tendo como escopo, proporcionar a exploração de conceitos matemáticos científicos, reconhecidamente complexos e abstratos (ALVES, 2014a; 2014b).

Outrossim, no conjunto das propriedades das soluções, enfatizaremos àquelas que podem ser percebidas em decorrência da mudança dimensional, qual seja $IR^2 \Rightarrow IR^3 \Rightarrow IR^2$.

5. Análise *a priori*

Na análise *a priori*, temos o interesse em determinar o controle do “comportamento dos alunos e seu sentido” (ARTIGUE, 1995, p. 258). Assim, o caráter preditivo do aparato conceitual ora descrito dependerá, também, das escolhas apontadas para a elaboração das situações-didáticas. Vale assinalar que não escolhemos situações que autorizam uma ação bastante autônoma do estudante, como assim observa Margolinas (1995, p. 345). Dessa forma, no bojo das variáveis micro-didáticas (relacionadas com a organização local da ED), levamos em consideração apenas àquelas condicionadas por uma situação didática, em contraposição a noção de situação a-didática (BROUSSEAU, 1986).

Para exemplificar, constituem nosso interesse, na elaboração de situações, a exploração da visualização do comportamento da dependência e independência linear. Nesse caso, a tecnologia pode, efetivamente, proporcionar a mobilização de conhecimentos que não se restringem a verificação da condições formais e analíticas (prevista pelo teorema). Assim, vamos considerar as funções $f(x)=sen^2(x)$ e $g(x)=1-\cos(2x)$. Ora, de imediato, vemos que $W[f,g](t)=\text{sen}^2(x)\cdot 2sen(2x)-(1-\cos(2x))\cdot 2sen(x)\cos(x)=\text{sen}(2x)\cdot\left(sen^2(x)+\cos^2(x)-1\right)=0$, logo, são LD (de acordo com o teorema 1). Mas, tendo em vista uma intervenção prevista pelo professor, o aluno não se restringe, somente, ao quadro algébrico explicativo, Com efeito, Na figura 2, logo abaixo, ao lado esquerdo, vemos que a função $k\cdot f(x)=k\cdot sen^2(x)$ pode sofrer determinadas modificações, para o valor $k\in IR$, de modo que, para um certo valor numérico obtido com o *software GeoGebra*, os gráficos de $k\cdot f(x)=k\cdot sen^2(x)$ e $g(x)=1-\cos(2x)$ devem coincidir. De outro modo, deve ocorrer uma sobreposição dos gráficos.

Abaixo vemos seu rastro na cor amarela. De modo semelhante, na figura abaixo, ao lado direito, os alunos podem explorar o comportamento das funções $f(x)=x^3$ e $g(x)=x^2|x|$. Mais uma vez, o rastro (na cor amarela), poderá sugerir a indicação de uma constante adequada que deve informar sobre o caráter de dependência linear do conjunto de funções, sem um apelo precipitado ao quadro analítico. Nesse último caso, entretanto, observamos que nem todas as funções em jogo são diferenciáveis (como $g(x)=x^2|x|$ não diferenciável na origem). Ao lado direito, podemos prever, por intermédio de uma manipulação do software, que a sobreposição das curvas (ao lado direito) será prevista apenas no para os valores positivos do eixo das abcissas.

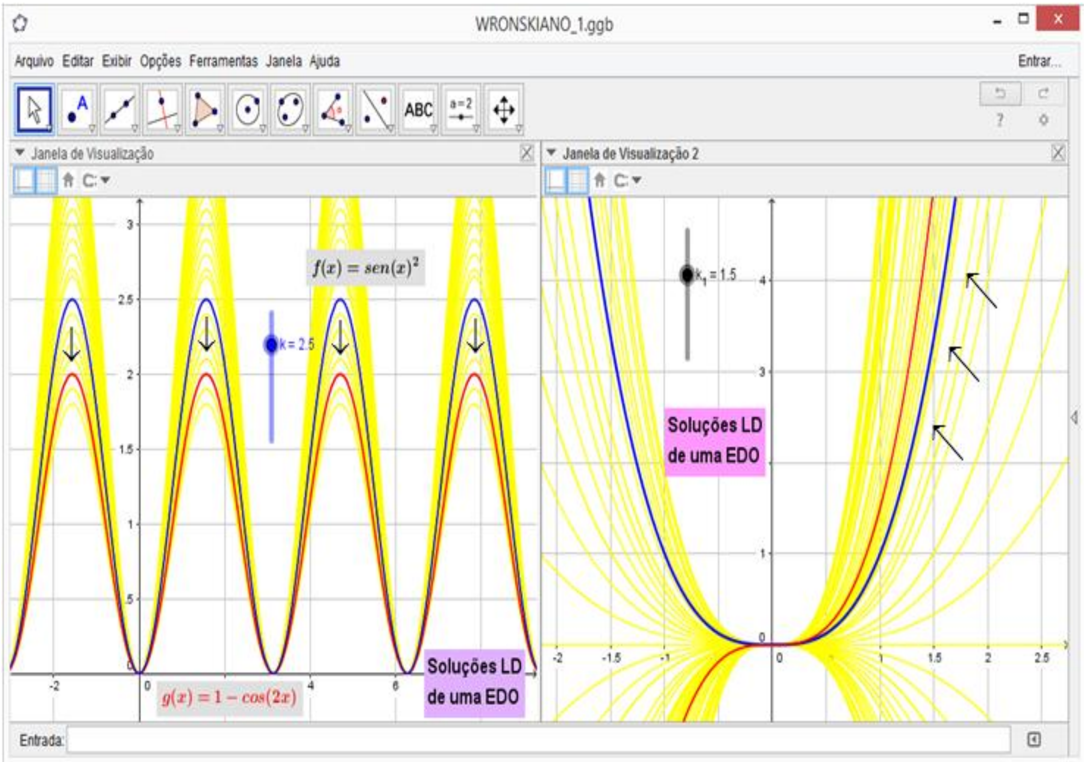

Figura 2. O software GeoGebra proporciona a inspeção do comportamento de dependência e independência linear de conjuntos de soluções de EDO´s (elaboração do autor).

6. Concepção e descrição das situações-didáticas

Assumimos posição concorde com Brousseau (1989, p. 15) quando acentua que "a aprendizagem é uma modificação do conhecimento e que o próprio aluno deve produzi-lo e que o professor deve provocar e seguir um certo raciocínio. Para fazer funcionar um conhecimento apropriado dos alunos, o professor busca uma situação apropriada". Desse modo, tendo em vista responder às questões de investigação e validar ou refutar as hipóteses (itens a, b, e c) anteriores, elaboraremos, analisaremos e anteveremos determinados entraves atinentes a um conjunto de três situações problema e, desse modo, seguimos o itinerário preceituado por Almouloud (2007, p. 174).

Antes, porém, vale recordar um aspecto fundamental apontado por Margolinas (2004, p. 31), quando registra que "o sistema didático é destinado à intenção de ensinar. Se o professor devolve uma situação ao aluno, se caracteriza a intenção de ensinar. Mas, o aluno aceita a responsabilidade do trabalho na situação é em virtude de ter conhecimento de que, tal situação permitirá o encontro dos saberes em jogo".

Situação-didática I: Considerando a equação $t^2x''+5\,t\,x'+6x=0$, determinar as equações analíticas que caracterizam sua solução, sabendo que, na figura 3, ao lado direito, exibimos sua trajetória (nas cores azul e vermelha).

Comentários. Os alunos deverão reconhecer que a equação é do tipo Euler-Cauchy (FIGUEIREDO & NEVES, 2008). E, podem escolher o método de resolução mais conveniente. No modelo geral, a solução buscada é da forma $x(t)=t^{\lambda}$. Deverá resultar na equação $t^2\cdot\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}+at\lambda t^{\lambda-1}+bt^{\lambda}=0$ e, a seguinte equação característica $\lambda^2+(a-1)\lambda+bt=0$. Assim, três casos poderão ser deparados pelos estudantes: $(a-1)^2-4b>0$, $(a-1)^2-4b=0$ ou $(a-1)^2-4b<0$.

Situação de ação. Na figura 3, os alunos devem perceber a impossibilidade de obtermos uma constante adequada, de modo que, o conjunto de soluções $\{x_1(t),x_2(t)\}$ seja LD. Ao lado esquerdo, na exploração da construção no *software GeoGebra*, deverão identificar pontos que são interpretados como vetores (no plano complexo). Por outro lado, ao lado direito, na mesma figura, podem visualizar curvas (nas cores azul e vermelha), na variável real. Doravante, o professor deve enfatizar a relevância de identificarem relações conceituais entre as curvas exibidas em ambas as janelas do *software GeoGebra*.

Situação de formulação. Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate a dialética "permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns". Assim, devem procurar soluções na forma $x(t)=t^{\lambda}$ onde o parâmetro a determinar aqui é indicado por 'λ'. Ora, substituindo em $t^2\left(t^{\lambda}\right)''+5\,t\left(t^{\lambda}\right)'+6\left(t^{\lambda}\right)=0$ $\therefore t^2\lambda(\lambda-1)\cdot t^{\lambda-2}+5t\cdot\lambda\cdot t^{\lambda-1}+6t^{\lambda}=0$. Ora, simplificando, vem ainda que $\lambda(\lambda-1)\cdot t^{\lambda}+5\lambda\cdot t^{\lambda}+6t^{\lambda}=0\leftrightarrow\left(\lambda(\lambda-1)+5\lambda+6\right)\cdot t^{\lambda}=0$. Assim, os estudantes podem tomar os seguintes casos distintos: $t>0$ ou $t<0$.

Para a primeira escolha, devem determinar o seguinte $\lambda(\lambda-1)+5\lambda+6=\lambda^2+4\lambda+6=0$. Ora, de imediato, vemos que o delta possui o valor numérico $\Delta = 14 - 24 = -10 < 0$. Daí, vem que $\lambda_1 = \left(-4 + \sqrt{-10}/2\right) = \left(-4 + \sqrt{10}i/2\right) = -2 + \left(\sqrt{10}/2\right)i$ e $\lambda_2 = \left(-2 - \sqrt{10}/2i\right)$. Assim, de acordo com o modelo que discutimos na segunda seção, podemos tomar as raízes $\lambda_1 = \mu + i\nu$ e $\lambda_2 = \mu - i\nu$ e que temos duas soluções que indicamos por $\psi_1(t) = t^{-2} \cdot t^{\sqrt{10}/2i}$ e $\psi_2(t) = t^{-2} \cdot t^{-\sqrt{10}/2i}$ envolvendo números complexos (ver fig. 3).

Ademais, usando o fato familiar aos aprendentes que $t^{\sqrt{10}/2i} = e^{(\sqrt{10}/2\ln(t))i} = \cos\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right) + sen\left((\sqrt{10}/2\ln(t)\right)i$. Portanto, as soluções anteriores serão descritas como $\psi_1(t) = t^{-2} \cdot t^{\sqrt{10}/2i} = t^{-2} \cdot \left[\cos\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right) + sen\left((\sqrt{10}/2\ln(t)\right)i\right] =$ $= t^{-2} \cdot \cos\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right) + i\left(t^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right)\right)$, para $t > 0$. E, pelo mesmo argumento, devem determinar que $\psi_2(t) = t^{-2} \cdot t^{-\sqrt{10}/2i} = t^{-2} \cdot \cos\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right) - i\left(t^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right)\right)$. Por outro lado, as duas últimas soluções, com valores complexos, podem ser reinterpretadas como duas curvas parametrizadas do tipo $t \mapsto \left(t^{-2} \cdot \cos\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right), \left(t^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right)\right)\right)$, em que $t > 0$. E, pelo mesmo argumento, teremos a outra curva $t \mapsto \left(t^{-2} \cdot \cos\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right), -\left(t^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{10}/2\ln(t)\right)\right)\right)$.

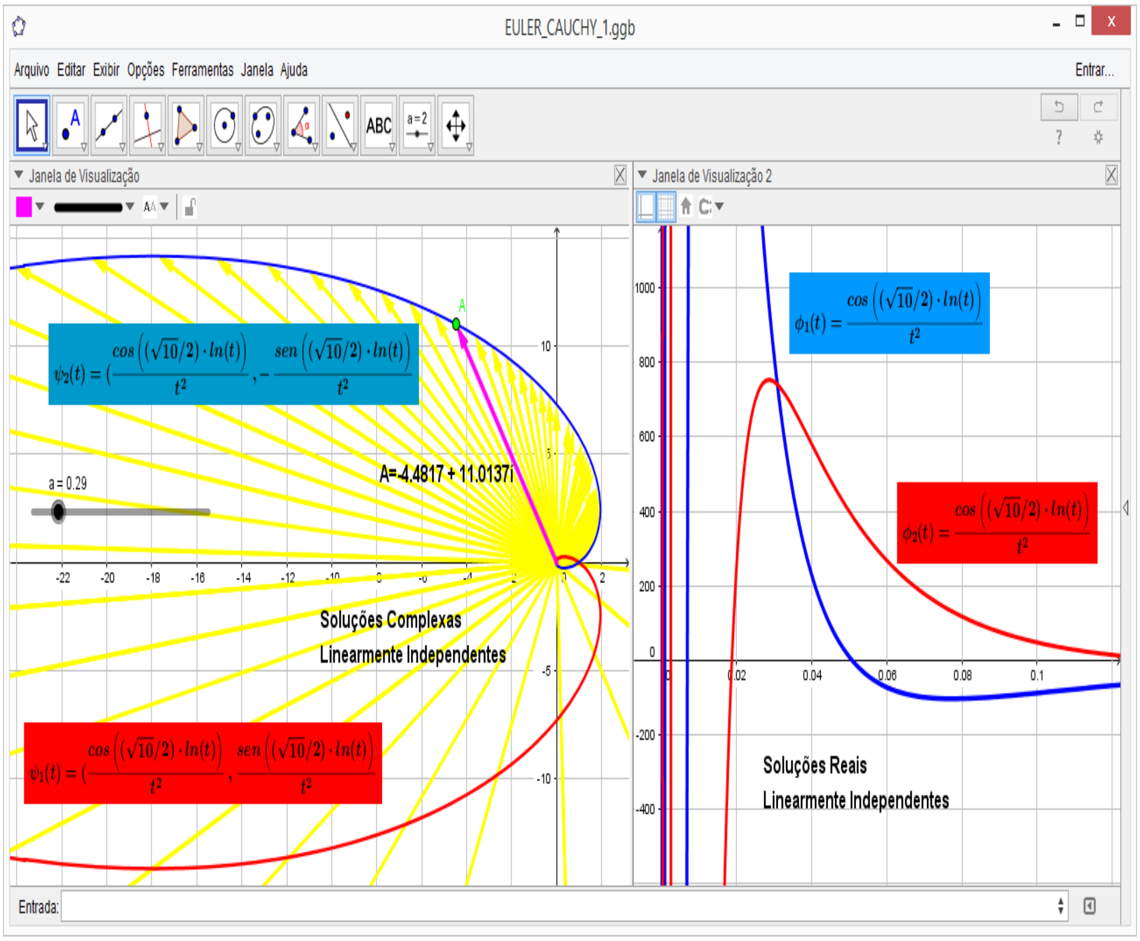

Figura 3. Visualização do comportamento das soluções LI assumindo valores complexos (ao lado esquerdo) e outras duas soluções LI assumindo apenas valores reais (elaboração do autor)

Por fim, duas outras soluções LI, envolvendo apenas números reais, podem ser descritas por $\phi_1(t) = t^{\mu} \cdot \cos\left(\nu \cdot \ln(t)\right)$ e $\phi_2(t) = t^{\mu} \cdot sen\left(\nu \cdot \ln(t)\right)$ (FIGUEIREDO & NEVES, 2002, p. 111). Ora, mas em nosso caso, os alunos devem verificar que $\phi_1(t) = t^{-2} \cdot \cos\left(\sqrt{10}/2 \cdot \ln(t)\right)$ e $\phi_2(t) = t^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{10}/2 \cdot \ln(t)\right)$. Assim, com arrimo na figura 3, divisamos um vetor (de cor rosa) que pode percorrer, para cada variação correspondente do parâmetro $t > 0$, descrevendo os valores complexos assumidos pelas soluções LI que designamos por $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$.

Por outro lado, ainda na figura 3, ao lado direito, vemos o comportamento gráficos das soluções LI que encontramos há pouco, designadas por $\phi_1(t) = t^{-2} \cdot \cos\left(\sqrt{10}/2 \cdot \ln(t)\right)$ e $\phi_2(t) = t^{-2} \cdot sen\left(\sqrt{10}/2 \cdot \ln(t)\right)$. Agora, recordamos as ponderações emitidas por Figueiredo & Neves (2002, p. 104), temos a oportunidade de demarcar as mudanças no comportamento das soluções, quer sejam na variável real, bem como no caso da variável complexa.

Situação de validação. A comprovação das conjecturas produzidas na fase dialética anterior podem ocorre, em observância da aplicação do teorema 1. Com efeito, como vimos que

$$W\left[\psi_1(t), \psi_2(t)\right] = \begin{pmatrix} t^{-2} \cdot t^{\sqrt{10}/2i} & t^{-2} \cdot t^{-\sqrt{10}/2i} \\ \left(t^{-2} \cdot t^{\sqrt{10}/2i}\right)' & \left(t^{-2} \cdot t^{-\sqrt{10}/2i}\right)' \end{pmatrix}$$

Tal formulação para $W\left[\psi_1(t), \psi_2(t)\right]$ deverá ser garantidora de que as afirmações sobre os comportamentos das soluções anteriores possuem fundamento formal, posto que, confirmam as conjecturas produzidas na fase dialética anterior, sobre seu caráter de independência linear.

Situação de institucionalização. Diferentemente das abordagens dos compêndios especializados na área, na presente fase, todos os dados coligidos, discutidos, que obtiveram êxito ou não, são direcionados ao parecer do grupo e do professor. A dialética da fase atual deve ser conduzida no sentido de fazer aderir a um *status* de conhecimento cultural adquirido pelo grupo. Por essa via, o conhecimento matemático que o *expert* deverá convencionar ou fixar (ARTIGUE, 1984, p. 8), seguindo os rituais acadêmicos, o estatuto cognitivo de um novo saber, rico em relações conceituais.

Situação-didática II: Considerando a equação $x'' - 2x' + 5x = 0$. Sabendo que a mesma admite soluções no campo dos reais e no campo dos complexos, determine-as, sabendo que nas figuras 4 e 5, exibimos tais soluções.

Comentários. Para efeito de nossa proposta de mediação, a discussão com os estudantes deve se originar a partir da exploração das figuras que exibimos logo abaixo. Neste caso, se mostra imprescindível o professor comparar o comportamento das figuras 3, 4 e 5. Por intermédio da visualização, os estudantes deverão correlacionar propriedades identificadas no espaço IR^2 e do espaço IR^3, relacionadas com as soluções exibidas abaixo.

Situação de ação. Ao lado esquerdo, na figura 3, os alunos devem perceber que as curvas nas cores azul e vermelha são LI. Ademais, seu comportamento oscilatório, determinado pela presença de funções periódicas $\cos(2t)$ e $\mathrm{sen}(2t)$ diminui, progressivamente, na medida em que desenvolvem uma análise visual (da direita para esquerda). Ao passo que, quando se detiverem o comportamento gráfico (da esquerda para a direita), poderão constatar que a oscilação e a amplitude das “cristas” aumentará. Mas, nas figuras 3 e 4, ao lado direito, os estudantes devem observar a existência de duas superfícies (nas cores azul clara e verde claro).

O professor deve instigar para que os estudantes percebem um comportamento semelhante de oscilação (no espaço). Isto é, é mesmo comportamento ondulatório no plano IR^2, das curvas, pode ser registrado com as superfícies, e ainda a presença de “cristas” ou “ondas” que aumentam, quando acompanhamos sua evolução da esquerda para a direita, mas agora no espaço IR^3.

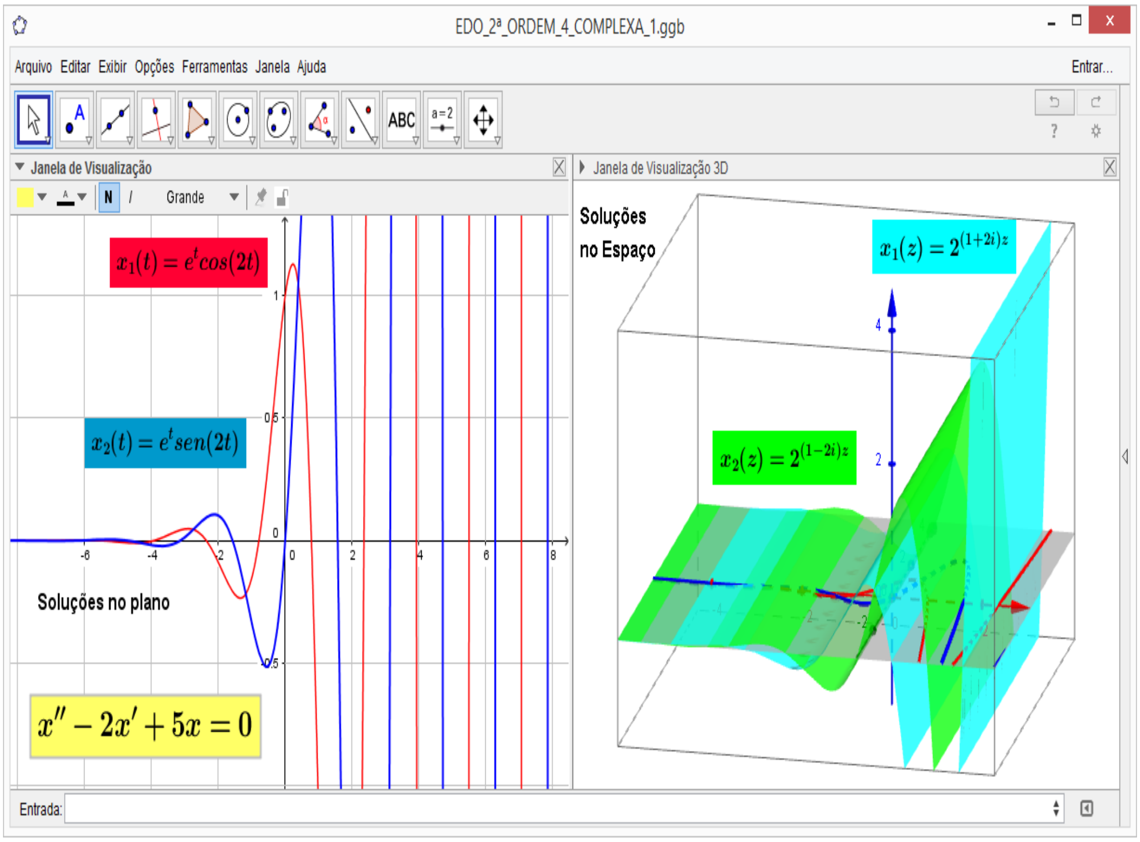

Figura 4. Visualização do comportamento das soluções LI assumindo valores complexos (ao lado esquerdo) e outras duas soluções LI assumindo apenas valores reais no plano (elaboração do autor)

Situação de formulação. A equação característica será do tipo $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, cujas soluções são dadas por $\lambda_1 = 1+2i, \lambda_2 = 1-2i$, com $p = -2, q = 5$. Reparemos que $\sqrt{4q - p^2} = \sqrt{20-4} = \sqrt{16} = 4$. Ora, repetindo o procedimento anterior, veremos que $x_1(t) = e^{-(p/2)t} e^{t\left(\sqrt{(4q-p^2)}/2\right)i} = e^t \cdot e^{2ti} = e^{-\mu t} \cdot e^{tvi} \leftrightarrow \mu = -1, v = 2$. Segue que, as soluções esperadas são $x_1(t) = e^t \cdot e^{2ti} = e^{(1+2i)t}$ e $x_2(t) = e^{(1-2i)t}$ na variável complexa.

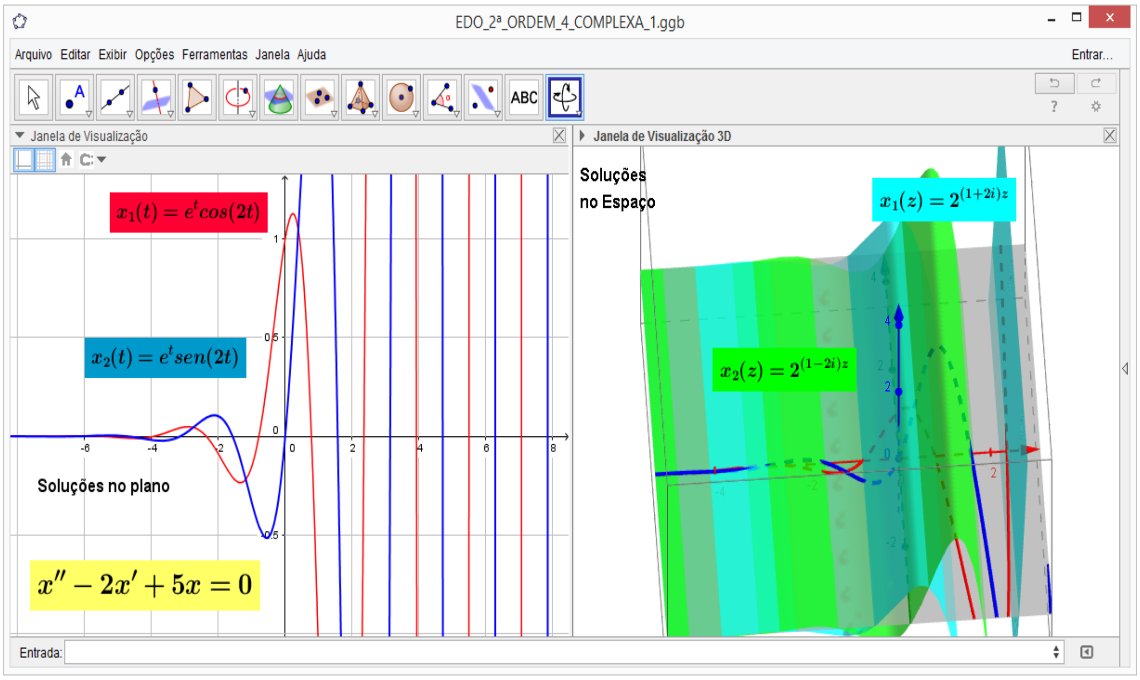

Figura 5. Visualização do comportamento das soluções LI assumindo valores complexos (ao lado esquerdo) e outras duas soluções LI assumindo apenas valores reais no plano (elaboração do autor)

Situação de validação. Nessa fase, num contexto do "debate da certeza das asserções" (ALMOULOUD, 2007, p. 40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferências empregadas afim de obter a certeza das relações estabelecidas. Dessa forma, o professor pode sugerir a verificação de que as expressões $x_1(t)=e^{(1+2i)t}$ e $x_2(t)=e^{(1-2i)t}$ constituem de fato soluções para a equação $x''-2x'+5x=0$. Mas, nesse caso, eles podem substituir diretamente na equação anterior $\left(e^{(1+2i)t}\right)''-2\left(e^{(1+2i)t}\right)'+5\left(e^{(1+2i)t}\right)=0$, ou ainda, podem tratar de inspecionar/verificar o comportamento da equação $\left(\cos((1+2i)\mathrm{t})+i\mathrm{sen}((1+2i)\mathrm{t})\right)''-2\left(\left(\cos((1+2i)\mathrm{t})+i\mathrm{sen}((1+2i)\mathrm{t})\right)\right)'$ $+5\left(\left(\cos((1+2i)\mathrm{t})+i\mathrm{sen}((1+2i)\mathrm{t})\right)\right)=0$.

Situação de institucionalização. Neste momento, de modo mais visível, o professor deve assumir o papel proeminente na fase atual (ALMOULOUD, 2007, p. 42), uma vez que, a determinação da forma e do conteúdo do saber para o qual ele tenciona aderir um determinado estatuto oficial institucionalizado. O diferencial, nesse caso, diz respeito ao fato de que os conhecimentos formais mobilizados e as concepções adquiridas, através das relações estabelecidas com o *software* (ver figura 3), deverão constituir o patrimônio local do grupo de estudantes, que envolveu a elaboração de um saber pelo grupo. Ou ainda, como explica Margolinas (2004, p, 31), o professor "faz a síntese dos conhecimentos e a ligação com o saber cultural". Na próxima situação, discutiremos o caso de uma equação diferencial de 3ª ordem. Mais uma vez, o processo dialético de devolução (MARGOLINAS, 2004, p. 31) ocorrerá em todas as fases da presente situação didática, durante a qual o problema deverá ser apresentado.

Situação-didática III: Considerando a equação $t^3\mathrm{y}'''-3t^2\mathrm{y}''+6\mathrm{t}\mathrm{y}'-6y=0$. Exibir sua solução geral, considerando os seguintes conjuntos $\{t,t^2,t^3\}$ e $\{f,g,h\}=\{t+t^2+2\mathrm{t}^3, 3\mathrm{t}+t^2-\mathrm{t}^3, 11\mathrm{t}+7\mathrm{t}^2+8t^3\}$.

Comentários. Os estudantes deverão relacionar os modelos discutidos nas seções anteriores com a atual generalização indicada por uma equação de terceira ordem. Assim, ao buscarem determinar uma solução do tipo $x(t)=t^{\lambda}$, devem deparar que $t^3\left(t^{\lambda}\right)'''-3t^2\left(t^{\lambda}\right)''+6\mathrm{t}\left(t^{\lambda}\right)'-6\cdot t^{\lambda}=0 \therefore \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)t^3\left(t^{\lambda-3}\right)-\lambda(\lambda-1)3t^2\left(t^{\lambda-2}\right)+\lambda 6\mathrm{t}\left(t^{\lambda-1}\right)-6\cdot t^{\lambda}=0$. O que resulta na equação $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$.

Situação de ação. Com arrimo na figura 6, o professor deverá estimular os estudantes na investigação do comportamento do gráfico das funções (soluções) $\{x_1(t),x_2(t),x_3(t)\}=\{t+t^2+2\mathrm{t}^3,3\mathrm{t}+t^2-\mathrm{t}^3,11\mathrm{t}+7\mathrm{t}^2+8t^3\}$. Ao lado esquerdo, divisamos uma curva (na cor amarela) que, em decorrência do ajuste adequado dos seletores do *software GeoGebra* devem permitir que a curva que indicamos pela seta □ se aproxime e possa ser sobreposta à curva (solução) $x_3(t)=11\mathrm{t}+7\mathrm{t}^2+8t^3$. Ora, com tal argumento visual, os estudantes devem perceber a combinação $x_3(t)=k_1\cdot x_1(t)+\mathrm{k}_2\cdot x_2(t)$. Ademais, a localização das raízes da equação $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$, a saber $\{1,2,3\}$.

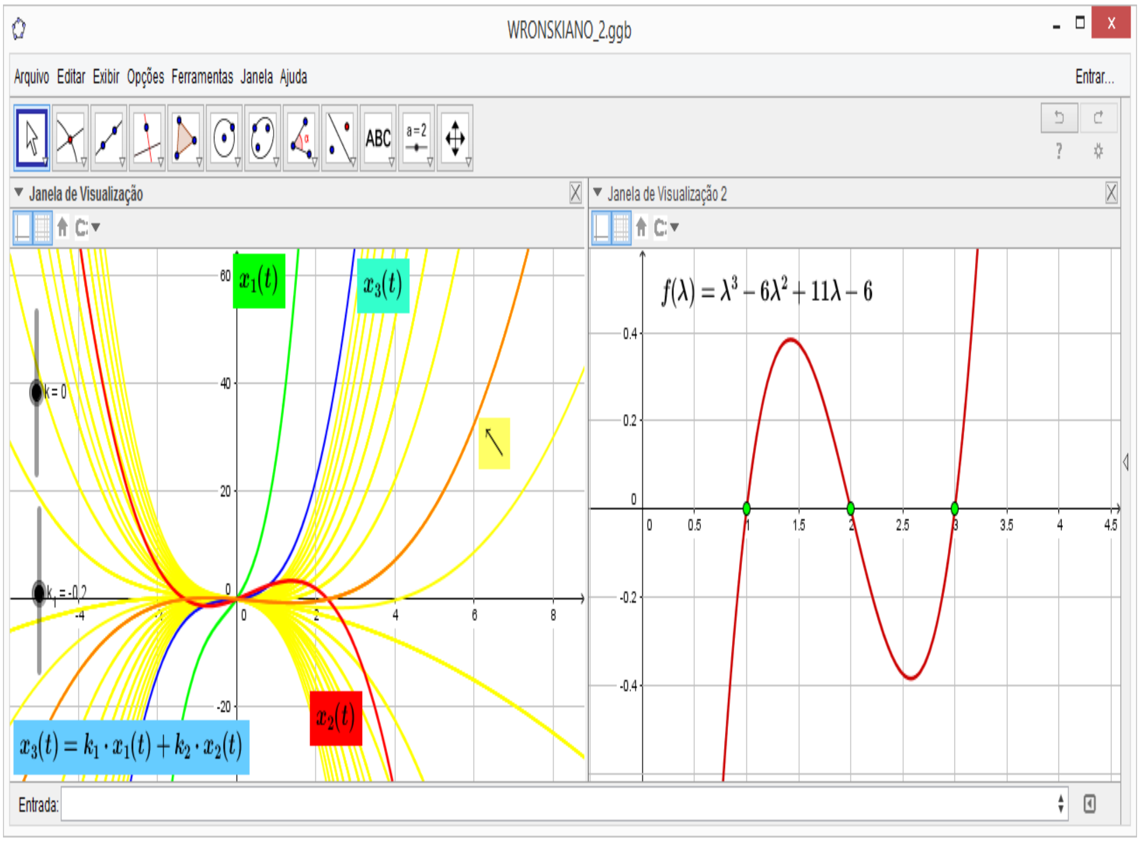

Figura 6. Visualização do comportamento das soluções LI de uma equação diferencial de 3ª ordem e, ao lado direito, o gráfico da equação característica correspondente

Situação de formulação. Ora, por analogia ao caso anterior, os estudantes buscam determinar as raízes de $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$. Mas, como indicado na seção anterior, suas raízes podem ser testadas analiticamente relativamente aos seguintes valores $\{1,2,3\}$, impulsionados pela informação da figura 6, sem o apelo necessário para a fórmula (de Cardano) de obtenção de raízes de uma cúbica. Dessa forma, a solução esperada satisfaz $x(t)=t^{\lambda}$, por exemplo $\lambda\in\{1,2,3\}$. Assim, em consonância com os dados do problema, esperamos encontrar o conjunto de funções $\{t, t^2, t^3\}$ como soluções da equação diferencial $t^3\,y''' - 3t^2\,y'' + 6\,ty' - 6y = 0$.

Para tanto, os estudantes devem ver que $\{t, t^2, t^3\}$ constituem soluções da equação anterior e é, ainda, um conjunto LI. Com efeito vemos que seu determinante abaixo é dado

$$W\left[t, t^2, t^3\right] = \det\begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{pmatrix}$$

Assim, inferimos que $W\left[t, t^2, t^3\right] = 2t^3 \neq 0, \forall t \in IR^*$.

Por outro lado, se considerarmos um segundo wronskiano que indicaremos por $W[f, g, \mathrm{h}] =$

$$= \det\begin{pmatrix} t + t^2 + 2t^3 & 3t + t^2 - t^3 & 11t + 7t^2 + 8t^3 \\ 1 + 2t + 6t^2 & 3 + 2t - 3t^2 & 11 + 14t + 24t^2 \\ 2 + 12t & 2 - 6t & 14 + 48t \end{pmatrix}$$

. Ora, quando avaliamos $W[f, g, \mathrm{h}](1) =$

$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 26 \\ 9 & 2 & 49 \\ 14 & -4 & 62 \end{pmatrix} = 0$$

.

Assim, podem concluir que o seguinte conjunto $\{f, g, h\} = \{t + t^2 + 2\mathrm{t}^3, 3\mathrm{t} + t^2 - \mathrm{t}^3, 11\mathrm{t} + 7\,\mathrm{t}^2 + 8t^3\}$ é LD, tendo em vista que $W[f, g, \mathrm{h}](1) = 0$ (teorema). Geometricamente, tal informação pode ser confrontada com o resultado indicativo do Wronskiano, todavia, com origem em certos comandos básicos do *software GeoGebra*, os estudantes poderão, inclusive, identificar os valores numéricos das constantes, de modo que $x_3(t) = k_1 \cdot x_1(t) + \mathrm{k}_2 \cdot x_2(t)$ (ver figura 6).

Situação de validação. Nessa fase, o professor atuará no sentido de estimular os aprendizes o retorno ao conjunto de conjecturas e ilações tacitamente formuladas, entretanto, exigem sua verificação, comprovação, quanto à validade e robustez dos resultados obtidos. Constitui elemento relevante, também, a identificação dos elementos que concorreram ao erro ou determinadas incongruências relacionadas com alguma estratégia de resolução. Por fim, recordamos que, diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário "provar o que foi afirmado na fase anterior" (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8).

Situação de institucionalização. Os dados coligidos nas fases anteriores envolvem uma natureza analítica, gráfica e numérica. Dessa forma, na fase de institucionalização, o professor deverá agir no sentido de incorporar um conhecimento elaborado-construído a partir da interação saber-aluno-professor, ao decurso das fases anteriores. Mas, nesse ponto, resgatamos uma perspectiva de Figueiredo & Neves (2002, p. 49) ao comentarem que:

> *Em muitos problemas não se faz necessário saber a expressão algébrica das soluções da equação [...] Basta saber propriedades dessas soluções, como por exemplo, seu comportamento quando x tende a algum valor pré-estabelecido. Com isto em vista, é interessante e importante estudar as propriedades geométricas da família das soluções da equação diferencial. Este é o problema básico no estudo das equações diferenciais, que pertence à chamada teoria qualitativa.*

Mas, desde que “o professor é responsável pelo ponto de vista do saber que circula na classe” (MARGOLINAS, 2004, p. 24), o ultimo excerto indica um ponto de vista imprescindível a ser sensibilizado com os estudantes imbuídos das três tarefas anteriores.

7. Considerações Finais

Neste artigo buscamos enfatizar e descrever situações planejadas e estruturadas, em que a visualização de determinadas propriedades qualitaativas e a exploração perceptual garantida pelo emprego da tecnologia no contexto do ensino acadêmico (ALVES, 2012; 2013a; 2013b; 2014a; 2015), que permitam atribuir significados intuitivos, tácitos e heurísticos a determinados conceitos no âmbito do teoria das EDO´S, notadamente, das equações diferenciais do tipo $x''+px'+qx=0$, de coeficientes constantes.

O percurso investigativo assumido, embora de cunho teórico e descritivo, se valeu dos pressupostos da ED, largamente conhecidos na literatura (ARTIGUE, 1989; OLIVEIRA & IGLIORI, 2013; ROBINET, 1983). Assim, não podemos perder de vista as considerações de Laborde (1997, p. 103) ao mencionar que a validação da ED consiste em “comparar os resultados de duas modelizações diferentes para o mesmo objeto”. Vale distinguir, por exemplo, das noções comentadas por Margolinas (2004, p. 33), envolvendo a avaliação e a validação das condições de realização de uma sequência de ensino, na fase de experimentação (etapa da ED).

Em nosso caso, com a intenção precípua de maior obtenção de dados para a etapa final, o modelo de comparação reside em considerar as mesmas situações didáticas, aqui discutidas, com outras abordagens que exibem ênfase maior na etapa de institucionalização, característico de um ensino acadêmico que evidencia os aspectos estruturantes da Matemática, em detrimento de uma abordagem qualitativa e numérica (ARTIGUE, 2013, p. 3).

Ademais, tendo em vista as advertências e reflexões de Figueiredo & Neves (2002), apresentamos três situações didáticas que, permitem a exploração metodológica do caráter heurístico e intuitivo, tendo em vista o papel destacado para a visualização (ver figuras 2,3,4 e 5). Nossa preocupação se aproxima do pensamento de Oliveira & Igliori (2013, p. 21), na medida em que indicam o enfoque qualitativo e contextualizado, como um fator de equilíbrio entre as abordagens analíticas, numéricas, gráficas, e recursos computacionais favorecendo uma mediação/abordagem planejada, bem como uma aprendizagem conceitual das equações.

Não propugnamos elementos (nas situações discutidas) envolvendo algum ineditismo, não obstante, nas situações didáticas discutidas aqui acentuamos, sob um viés diferenciado, os seguintes elementos de ordem qualitativa: os estudantes têm possibilidade de vivenciar e comparar o comportamento gráfico-geométrico das soluções na variável real e na variável complexa; os estudantes têm a possibilidade de adquirir um entendimento relativo a um conjunto de soluções LI ou LD, do ponto de vista gráfico-geométrico; os estudantes têm a possibilidade de comparar, graças ao aparato tecnológico, os quadros de representação analítica e gráfico-geométrico. Os estudantes podem visualizar as propriedades dos conjuntos de soluções, concernentes aos casos das EDO´s que abordamos. Tais elementos devem concorrer para a confirmação de nossas hipóteses que foram elaboradas a partir de nossas escolhas (variáveis micro-didáticas) ao decurso das fases de nossa ED.

Ora, certamente que os conhecimentos mobilizados em cada fase prevista pela TSD não se distanciam de nossa preocupação com a formalização necessária, entretanto, assumindo posição concorde com Figueiredo & Neves (2012), um componente metafórico, intuitivo e heurístico deve sempre anteceder e jamais ser negligenciado numa boa aula sobre EDO´s. Por fim, aproveitando o último excerto da seção anterior, acentuamos nossa atenção em desenvolver uma espécie de "teoria qualitativa" versando o tema de equações diferenciais de segunda ordem. Ora, como bem frisaram os autores Figueiredo & Neves, as propriedades geométricas das soluções (ver figuras 3,4,5 e 6) proporcionam aos estudantes um acréscimo de conhecimentos sobre o assunto. E, de modo inconteste, a partir do que foi apresentado nas fases dialéticas da TSD, tais conhecimentos extrapolam o trato restritivamente analítico, formal e estruturante que estamos acostumados a presenciar na universidade, no que concerne a vários assuntos em Matemática (ARTIGUE, 2013).

5. Referências

ALVES, Francisco. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011, p. 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

ALVES, Francisco. R. V. Família de Curvas planas e sua envoltória: visualização com o software GeoGebra. **Conexões Ciência e Tecnologia**. v. 8, nº 3, 67 – 71, 2014a.

ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análise preliminares e a priori. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, 7(3), 148 – 168, 2014b.

ARTIGUE, Michele. L´impac curriculaire des technologies sur L´Education Mathematique. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 4, nº 1, 1-14, 2013.

ARSLAN, Salahattin. **L'Approche Qualitative Des Équations Différentielles en Classe de Terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?** (thése de doctrat). Grenoble : Université Joseph Fourier. 2005, 287f.

ARSLAN, Salahattin. Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. **Teaching Mathematics and it´s applications**. v. 29, nº 15, 94 – 107, 2010.

Artigue, M. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. **Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques**, 8(1), 1 – 38, 1984.

ARTIGUE, Michelle. Une recherche d´ingénierie didactique sur l´enseignement d´équation differrentiélle du premir cycle universitaire, **Cahier du Seminaire Didactique de Mathématiques et Informatiques**. Grenoble: Édition IMAG, 183 – 209, 1989.

BASSALO, José, M. A crônica do Cálculo: contemporâneos de Newton e Leibniz. **Revista Brasileira do ensino de Física**. v. 18, nº 4, 328-336, 1996.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation des phénomènes d´enseignement de mathématiques**. (thése D´État et sciences) – Université de Bordeaux I. Bordeaux. 1986.

BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître**. Bulletin de l'A.M.Q. Montréal**., 1988, 14-24, 1989.

Brousseau, G. **Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Paris: La Pensée Sauvage, 5 – 66, 1994.

CHOQUET, G. **What is Modern Mathematics?** England: Educational Explorers Limited, 1963.

DOERING, C. I. & LOPES, Arthur, O. **Equações Diferenciais Ordinárias**, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) **Ingenieria Didactica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1 – 7, 1995.

DÍAZ, Josefa. P. (2011). **Construcción del concept de Ecuación Diferencial Ordinaria em cenários de resolución de problemas**. (thesis). Laguna: Universidad de La Laguna.

EDWARDS, C. Henry. & PENNEY, D. E. (2008). **Elementary Differential Equation**. Sixth Edition, London: Pearson Prenticce Hall.

FIGUEIREDO, Djairo. G. & NEVES, Aloisio. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

JUNIOR, Montalban. J. O. (2005). **Caustica por reflexão e teoria das catástrofes**. (dissertação de mestrado). Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/teses/Aplicada/064.pdf.

LABORDE, C. Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **DIDASKALIA**, 10(1), 97 – 112, 1997.

MAAT, Siti. M. & ZAKARIA, Effandi. (2011). Exploring student´s understanding of ordinary differential equations using Computer Algebraic System (CAS). **The Turkish Online Journal of Educational Technology**. July, v. 10, nº 3, 123 – 128.

MARGOLINAS, C. Dévolution et intitutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôles du maître. Comiti, C.; Bessot, M. P. **Didactiques des disciplines scientifiques et formation des enseignants**, 342 – 347, 1995.

MARGOLINAS, C. **Points de vues de l´élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques** (Habilitation de recherche). Provence: Université de Provence. 160f, 2004.

OLIVEIRA, Eliane. A. & IGLIORI, Sonia. B. C. (2013). Ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 4, nº 2, 1 – 24.

POLYANIN, Andrei. D. & ZAITSEV, Valentin, F. (1995). **Handbook of exact solutions for Ordinary Differential Equation**.

RASMUSSEN, Chris. (1998). Reform in Differential Equation: a case of student´s understanding and difficulties. **Proceedings of the twenty-second PME conference**. Stellenbosch, South Africa, 25 – 32.

RASMUSSEN, Chris (2001). New directions in differential equations: a frame work for interpreting students´ understandings and difficulties. **Journal of Mathematical Behavior**. nº 20, 55 – 87.

ROBERT, A. Ingénierie didactiques sur les suites après le baccalaureat. **Le Cahiers Blancs**. *4* (1), 1-25, 1983.

ROBINET, J. De L´ingenierie Didactiques. **Les Cahiers Blancs**. v. 1, nº 1, 1 – 11, 1983.

ROWLAND, David. R. & JOVANOSKI, Zlatkov. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. **International Journal of Mathematical Education**, v. 35, nº 4, 503 – 516.

RODRIGUEZ, Ruth. (2008). Les équations différentielles comme outil de modélisation math´ematique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'elèves en Terminale S (thése de doctorat). Grenoble: Université Joseph Fourier Grenoble I,

SAGLAM, Ayse. (2004). Les Équations Differentielles em Mathématiques et en Physique. (thése de doctorat. Grenoble I : Université Joseph Fourier. 264f.

STILLWELL. John. (1997). Mathematics and its History. New York: Springer.

VILCHES, M. A. (2009). Envoltórias de curvas planas. In: Cadernos do IME. v. 21, nº 3. p. 1-32. Disponível em: http://magnum.ime.uerj.br/cadernos_mat/cadmat_arquivos/V2021/cime.pdf. Acessado em: 7 de agosto.

TALL, David. (1986). Lies, Damm, Lies and Differential Equations. In: Mathematic Teaching. nº 114, p. 54-57.

TESTARD, Laurent. (2004). Calculs et visualisation en nombres complexes (thése en Mathematique Appliquée). Grenoble: Université Joseph Fourier. 210f.