UMA ANÁLISE DE RESPOSTAS DE ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A UMA QUESTÃO SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS, À LUZ DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

ANALYSIS OF ANSWERS FROM UNDERGRADUATE MATHEMATICS STUDENTS TO A QUESTION CONCERNING NUMERICAL SEQUENCES IN THE LIGHT OF SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS

Miriam Ferrazza Heck*, Helena Noronha Cury

UFN – Santa Maria – RS – Brasil

Resumo: Neste artigo, são apresentadas respostas de 26 licenciandos de Matemática a uma questão sobre sequências numéricas, com o objetivo de analisar a forma como esses alunos transitam pelos registros de representação semiótica. A pesquisa faz parte de um projeto mais amplo, apoiado pelo Edital Universal do CNPq, e envolve duas instituições de ensino superior do Estado do Rio Grande do Sul. Pelos resultados, foi possível notar que esses participantes têm muita dificuldade em converter os enunciados em língua natural ou as representações figurais para os registros simbólicos das sequências. Tais dificuldades podem influenciar a aprendizagem de seus futuros alunos, haja vista que mostram não terem compreendido os conceitos de sequência numérica, em especial os de progressão geométrica, já ensinados em nível médio ou no próprio curso superior.

Palavras-chave: alunos de Licenciatura em Matemática, sequências numéricas, representações semióticas.

Abstract: In this article, responses of 26 undergraduate mathematics students to a question on number sequences are presented, in order to analyze how these students go through the semiotic representation registers. The research is part of a broader project, supported by CNPq, and involves two higher education institutions of Rio Grande do Sul. By the results, it was possible to note that these participants have a hard time converting the statements in natural language or figural representations to the symbolic register of the sequences. Such difficulties can influence the learning of their future students, because it seems that they do not have understood the concepts of numerical sequence, in particular the geometric progression, as taught at secondary level or at the university.

Keywords: undergraduate mathematics students, numerical sequences, semiotic representations.

1. Introdução

O conteúdo de sequências numéricas é estudado no ensino superior geralmente nas disciplinas que estão relacionadas com Cálculo. Entre as sequências, as progressões aritméticas (P.A.) e geométricas (P.G.) são estudadas no Ensino Médio e, em representações figurais,

* mhecmat@hotmail.com

também são encontradas nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Assim, por ser um conteúdo que perpassa todos os níveis de ensino, é importante que os professores em formação inicial tenham uma sólida compreensão desse conteúdo, tanto em termos conceituais como procedimentais.

Em um projeto de pesquisa apoiado pelo CNPq[1], com o objetivo de analisar a forma como alunos de Licenciatura em Matemática transitam pelos registros de representação semiótica, foram investigadas respostas de licenciandos em Matemática de duas instituições de ensino superior do Rio Grande do Sul a uma questão sobre sequências numéricas. Na investigação, de caráter qualitativo, foi aplicada a eles a questão, visando à elaboração posterior de um conjunto de atividades sobre esse conteúdo, para uso em cursos de formação de professores. A análise das respostas dos licenciandos foi realizada à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

2. Pressupostos teóricos

Duval (2006) considera que, para entender as dificuldades que muitos alunos apresentam para compreender a Matemática, devemos determinar o funcionamento cognitivo subjacente aos diferentes processos matemáticos, que mobilizam registros de representação. Ainda segundo ele, “nenhum tipo de processo matemático pode ser realizado sem usar um sistema de representação semiótica, porque os processos matemáticos envolvem *a substituição de alguma representação semiótica por outra*.” (p. 107, grifo do autor).

Para Duval,

> *[...] as representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes.* (2012a, p. 269, grifo do autor).

Duval (2012a) considera que, se chamamos de *semiose* a apreensão ou produção de uma representação semiótica e de *noésis*, a apreensão conceitual de um objeto, então não há *noésis* sem *semiose*. No entanto, esse fato gera um paradoxo cognitivo, visto que pretendemos ensinar como se a *semiose* fosse uma operação desprezível em relação à noésis, ou seja, como se fosse possível ensinar um conceito sem passar pela sua representação. Dessa forma, o autor salienta a importância de usar múltiplos registros de representação semiótica (língua natural, figuras, símbolos, tabelas, gráficos) e de transitar entre eles.

Segundo Duval (2009), há três atividades cognitivas fundamentais da *semiose*: formação (identificação do objeto matemático representado), tratamento (operação cognitiva que vai compreender uma transformação do registro representação no interior do mesmo sistema semiótico de representação em que foi formado) e conversão (transformação de um dado

---

[1] Processo 443118/2014-0

registro de representação, pertencente a um sistema semiótico em outro registro, pertencente a outro sistema semiótico).

Diferentemente das áreas de Física ou de Química, em que o acesso aos objetos é feito pelos sentidos ou por instrumentos, em Matemática esse acesso só é feito pela produção de representações semióticas. E Duval (2012b, p. 310) questiona: "como reconhecer que duas representações semióticas diferentes são representações do mesmo objeto, se não se tem um acesso não semiótico àquilo que é representado?". Esse reconhecimento é possível quando se sabe fazer a conversão de um registro para outro (ou outros) e nos dois sentidos; por exemplo, se temos uma equação do tipo $y=3x+4$, podemos representá-la, em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, como uma reta. Em sentido inverso, partindo de um gráfico de uma reta no mesmo sistema de eixos, podemos representar essa informação em termos algébricos, como uma equação da forma $y= a.x + b$, com a diferente de zero.

Erros cometidos pelos alunos constituem-se em uma fonte importante de dados para responder a perguntas sobre seu conhecimento em Matemática. No entanto, Duval (2012b) observa que há dois tipos de erros radicalmente diferentes: os transitórios e os recorrentes. Os primeiros aparecem quando um conteúdo específico ou um processo matemático particular está sendo ensinado e chamam a atenção do professor somente quando tal conteúdo ou procedimento é diretamente utilizado. Por exemplo, no ensino da função afim, é comum notarmos erros relacionados à representação gráfica dessa função, como, por exemplo, esboçar o gráfico de uma função linear.

Por outro lado, os erros recorrentes são independentes do conteúdo; na verdade, são transversais a todos os conteúdos e relacionam-se às maneiras de definir, de raciocinar. "Manifestam dificuldades de compreensão que se encontram em todos os níveis de ensino." (DUVAL, 2012b, p. 320). Como exemplo, temos erros tais como a sobre generalização de propriedades que, apesar de todas as explicações do professor, repetem-se a cada novo conteúdo estudado.

Duval (2012b) considera, então, que a capacidade de diagnosticar os erros dos alunos e elaborar sequências de atividades que permitam o acesso ao seu pensamento são competências que deveriam ser desenvolvidas pelos professores em formação inicial, visto que esses, muitas vezes, não se dão conta de suas próprias dificuldades nos mesmos aspectos.

A questão apresentada aos licenciandos participantes da pesquisa envolve um padrão que se repete. A estrutura de padrões e regularidades é matematicamente estabelecida quando existe a possibilidade de identificar conceitualmente a ordem ou estrutura que regulam uma série de repetições, ou seja, segue basicamente a ideia de repetição e mudança.

Para Vale (2009), fazer uma generalização algébrica consiste em tomar uma característica comum que é notada em alguns elementos de uma sequência, perceber que se aplica a todos os termos dessa sequência e ser capaz de usá-la numa expressão que traduza qualquer termo. Segundo Vale (2012), um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica, indefinidamente, e será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior.

Assim, nesta pesquisa, ao buscar entender as respostas de licenciandos em Matemática a uma questão sobre sequências numéricas, representada por um padrão que se repete, estamos construindo um conhecimento que poderá ser usado pelos formadores nas aulas desses mesmos licenciandos, para conscientizá-los de suas dificuldades, conceituais ou procedimentais.

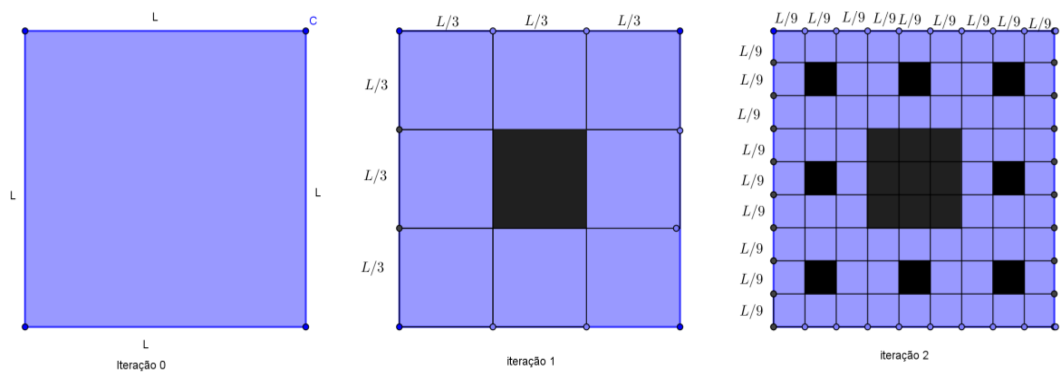
3. Procedimentos metodológicos

A pesquisa relatada neste artigo tem caráter qualitativo e pode ser classificada como pesquisa de campo, visto que foi realizada no local em que o problema acontece, em sala de aula de cursos de Licenciatura em Matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

A aplicação do teste foi realizada em turmas de cursos de Licenciatura em Matemática de duas instituições de ensino superior do Rio Grande do Sul. O período de aplicação foi de aproximadamente 50 minutos e os alunos já haviam estudado o conteúdo de sequências em alguma disciplina inicial do curso, como Cálculo. Todos os participantes assinaram Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e seus nomes foram indicados pela letra A, seguida de um número, para preservar suas identidades.

A questão aplicada possui o seguinte enunciado:

A sequência de figuras abaixo ilustra o fractal denominado Tapete de Sierpinski.



Partindo de um quadrado de lado *L*, faz-se uma divisão de seu lado em três partes iguais, formando-se nove novos quadrados similares ao inicial. Nessa divisão, elimina-se o quadrado central, ficando, na primeira iteração, com oito quadrados. A partir disso, na segunda iteração, considera-se cada um destes como se fosse o inicial e repete-se o procedimento, e assim sucessivamente.

A partir dessa construção:

(a) Escreva a sequência formada pelas medidas dos lados dos quadrados até a quinta iteração, além da expressão do seu termo geral.

(b) Escreva a sequência formada pela quantidade de quadrados que permanecem em cada interação, na construção fractal, bem como seu termo geral.

(c) Tomando-se um quadrado de cada iteração, calculando sua área e formando uma sequência, qual é a expressão do seu termo geral? Qual a soma dessas áreas?

A questão foi apresentada em linguagem natural e com registro figural; esperava-se que os alunos interpretassem o enunciado, convertessem as informações para a linguagem simbólica, nela realizassem os tratamentos e expressassem os resultados.

Após a coleta de todas as respostas à questão aqui analisada, foi feita a correção, usando-se os seguintes critérios:

- resposta correta (C): quando o aluno compreende a questão, mostra conhecer o conteúdo e usa estratégias adequadas para a solução;

- resposta parcialmente correta (PC): quando o aluno apresenta corretamente uma parte da resposta, mas deixa em branco ou erra uma segunda parte;

- resposta incorreta (I): quando o aluno usa estratégia inadequada e chega a uma resposta incorreta; ou quando indica uma resposta correta, mas sem qualquer desenvolvimento;

- resposta em branco (EB): o aluno deixa a questão em branco ou apenas copia os dados do enunciado, sem qualquer tentativa de solucionar.

As respostas foram discutidas em termos de conteúdos matemáticos e, também, em relação aos registros de representação utilizados. Neste texto, optou-se por digitar algumas respostas, porque foram escritas a lápis, o que dificultou a visibilidade da imagem escaneada, mas, quando possível, são apresentadas as respostas originais.

4. Apresentação e análise dos dados

Inicialmente, após a correção, os dados foram transportados para uma planilha Excel, para facilitar a contagem do número de respostas em cada categoria. O Quadro 1 mostra, então, a distribuição das respostas corretas (C), parcialmente corretas (PC), incorretas (I) e em branco (EB).

Quadro 1 – Distribuição das respostas por categoria

Categoria	**Itens**					
	a		**b**		**c**	
	N.	**%**	**N.**	**%**	**N.**	**%**
C	8	30,8	5	19,2	1	3,8
PC	6	23,1	7	26,9	8	30,8
I	9	34.6	9	34,6	9	34,6
EB	3	11,5	5	19,2	8	30,8
Total	26	100,0	26	100,0	26	100,0

Fonte: dados da pesquisa

Chama a atenção o fato de que a porcentagem de respostas corretas, em qualquer dos itens, não ultrapassa 31%, o que, em se tratando de licenciandos, pode ter influência negativa na aprendizagem de seus futuros alunos, relativamente ao conteúdo “progressões geométricas”.

A seguir, as respostas a cada item da questão foram analisadas, para verificar as representações que foram usadas. Nas respostas corretas ao item (a), de modo geral, os licenciandos fizeram a tradução do enunciado em linguagem natural, explicitando a resposta em linguagem simbólica. Como exemplo, temos a resposta dos alunos A2 e A3, que representaram a sequência por $\left\{\frac{L}{3^0}, \frac{L}{3^1}, \frac{L}{3^2}, \frac{L}{3^3}, \frac{L}{3^4}, \ldots, \frac{L}{3^n} \ldots\right\}$, iniciando pelo termo de ordem zero; ou seja, talvez para esses alunos, a sequência seja definida em $\mathbb{N}$= {0,1,2...}, o que não está de acordo com a definição de Lima (1999), para quem o conjunto dos naturais exclui o zero. Já o aluno A5 iniciou pelo termo de ordem 1 e indicou também o termo geral.

Nesse item (a), seis alunos acertaram parcialmente as respostas; alguns apresentaram corretamente a sequência, mas erraram o termo geral, como os alunos A1 e A11, cujas respostas são: A1: $a_n = a_{n-1}.q^{n-1}$ e A11: $a_n = \frac{1}{3}.a_{n-1}$.

Ambos parecem ter usado uma fórmula de recursão para indicar esse termo, o que pode ser um erro transitório, referente ao esquecimento de uma expressão aprendida no Ensino Médio, sobre a fórmula do termo geral de uma P.G.

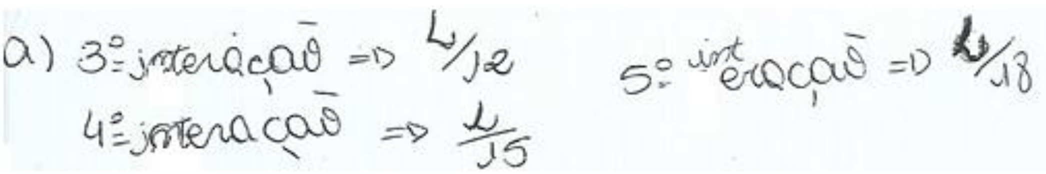
Outros alunos que acertaram parcialmente apenas indicaram o termo geral, sem se preocupar em completar a resposta, não apresentando os cinco primeiro termos.

Ainda no item (a), nove licenciandos erraram as respostas. A4 entendeu que tinha sido solicitada a área dos quadrados, porque expressou cada termo como a diferença entre o anterior e a área dos quadrados que restavam. A12 apenas somou os três primeiros termos da sequência. A15 escreveu: $1 = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n^2-(n^2-1)}$.

A20 escreveu: {L, L3, L9, L27, L81, L243}. A21 apenas indicou: L= 1; L_1= L_3; L_2= L_9; L_3= L_{15}; L_4= L_{21}; L_5= L_{27}.

Por sua vez, o aluno A22 apresentou a resposta reproduzida na Figura 1:

Figura 1 – Resposta do aluno A22

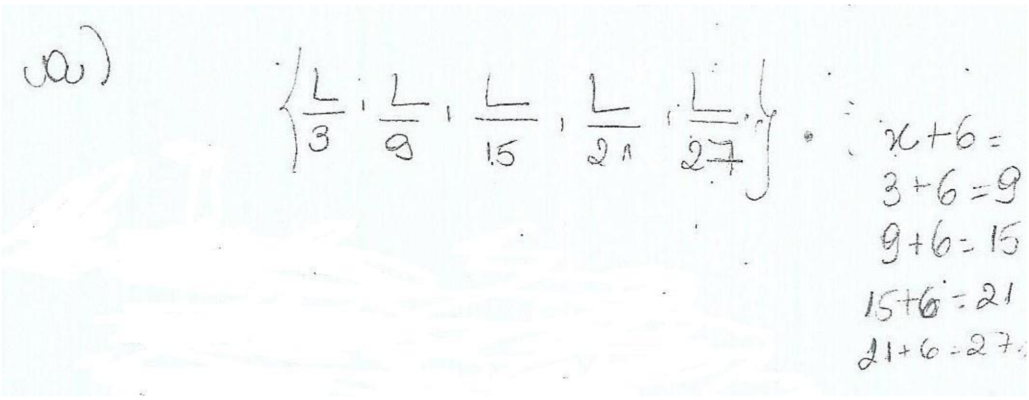


Fonte: dados da pesquisa

O aluno A23 indicou a soma de cinco termos, mas errou os denominadores das frações, considerando que seriam 1, 3, 9, 15 e 21, ao invés de 1, 3, 9, 81 e 243. Neste sentido, o aluno A24 também indicou a soma de cinco termos, porém apresentou os denominadores das frações como potências de 9.

Por sua vez, o aluno A26 escreveu a resposta indicada na Figura 2, a seguir, em que os denominadores das frações formam uma P.A. de razão 6.

Figura 2 – Resposta do aluno A26



Fonte: dados da pesquisa

Para entender, como cada respondente pensou ao elaborar a resposta, seria necessário entrevistá-los e solicitar uma justificativa para a resposta; no entanto, consideramos que não identificaram o objeto matemático, não souberam converter a linguagem natural para a simbólica e, nesta, não realizaram tratamentos. Por exemplo, chama a atenção o erro de A15, pois, se aceitarmos as igualdades propostas, teremos que n= 2, pela igualdade à esquerda, e um valor complexo para n, se igualarmos as duas frações. Por isso, pode ser classificado como sendo, um erro recorrente, pois envolve problemas de raciocínio matemático.

No item (b), cinco alunos acertaram a resposta, indicando corretamente a sequência e seu termo geral. Da mesma forma que no item (a), A2 e A3 indicaram 1 como termo de ordem zero, enquanto que A16 iniciou pelo termo de ordem 1.

Identificou-se que sete licenciandos acertaram parcialmente o item (b). O aluno A1 apresentou apenas três termos e não indicou o termo geral; efetivamente, este aluno calculou o número de quadrados que permanece fazendo uma diferença entre o número total e os que foram retirados. Por isso, no quarto termo calculado, tornou-se difícil continuar com o tratamento que tinha realizado para o cálculo dos outros termos e o aluno encerrou sua solução.

O aluno A7 apenas escreveu o termo geral; A9 indicou-o como $(9 - 1)^n$, o A11 apresentou corretamente os termos, mas indicou o termo geral por recorrência ($a_n = 8.\ a_{n-1}$). Já o A17, apesar de ter escrito corretamente os dois primeiros termos, indicou a_n como 1/512. Os alunos A19 e A20 apenas indicaram os primeiros termos da sequência.

Observa-se que, nove licenciandos erraram as respostas ao item (b). O aluno A5 indicou os termos por 1, 9, 27, 81..., e não apresentou termo geral, já o A15 cometeu o mesmo tipo de erro do item (a), escrevendo:

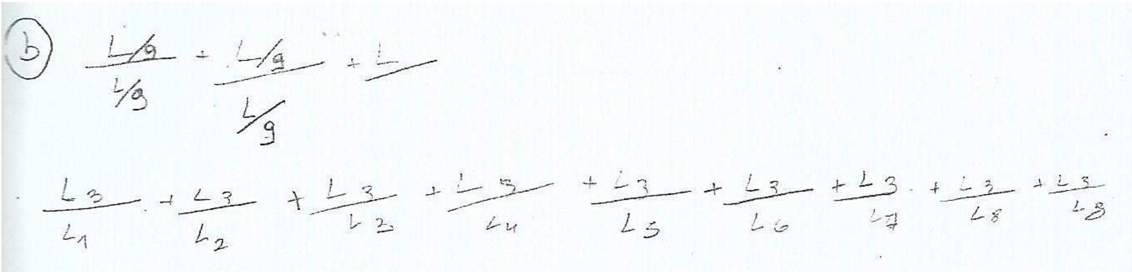
$$1 = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{81-8}.$$

A18 indicou a sequência por (8, 56, 570, 6.320...), A21, por (1, 8, 62) e A22, por $\frac{L}{1}, \frac{L}{8}, \frac{L}{54}$.

Nenhum deles indicou termo geral, por isso não é possível entender qual a razão para a escolha dos números, pois não há um valor tal que $a_{n+1}/a_{n,}$ seja constante.

A23 indicou apenas o termo geral por $a_n = a_{n+1}$. O aluno A24 indicou a sequência como uma soma de frações, de numerador L3 e denominador variando de L1 a L8, como pode ser visto na Figura 3, mas não foi possível, também, entender seu raciocínio para gerar esses termos.

Figura 3 – Resposta do aluno A24



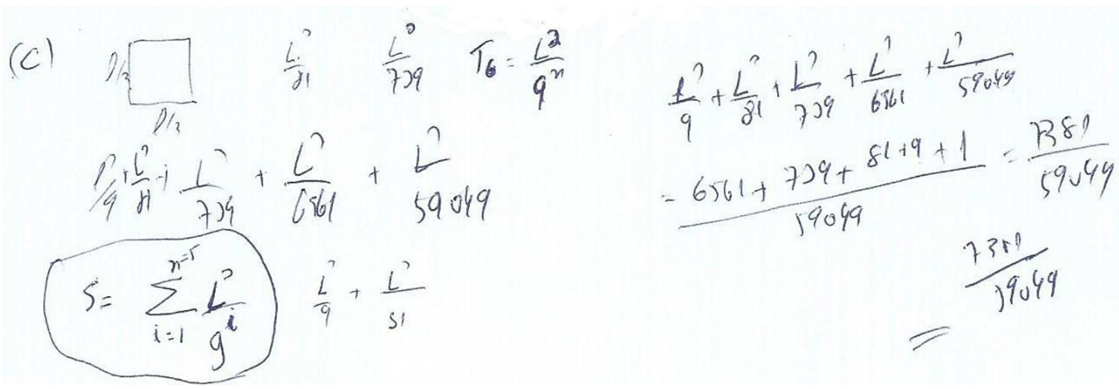
Fonte: dados da pesquisa

A25 deu uma explicação para cada termo obtido; na iteração 1, considerou que há 9 quadrados e, com um retirado, de lado L/3, o termo geral seria $3^2 - 1$. Para a iteração 2, considerou que há 81 quadrados, sendo 9 os que foram retirados antes e mais 8 retirados nesta iteração e, assim, o termo geral seria $9^2 - 8$; e assim por diante, concluindo que o termo geral é $d^2 - k$, sem explicar o significado dessas letras. Essa resposta evidencia uma falta de entendimento da questão, (ou seja, não soube traduzir da linguagem natural para a simbólica), além de ser um erro recorrente, pois mostra não saber a definição de sequência. Finalmente, A26 indicou apenas o termo geral: $a_n = a_n + 6$. O aluno apresenta um erro recorrente, haja vista que, se fizer o cálculo, obterá 0= 6!

No item (c), apenas o aluno A16 acertou a resposta, indicando o termo geral da sequência e usando a fórmula da soma dos termos de uma PG decrescente ilimitada, de razão q, $|q| < 1$, para calcular esse valor.

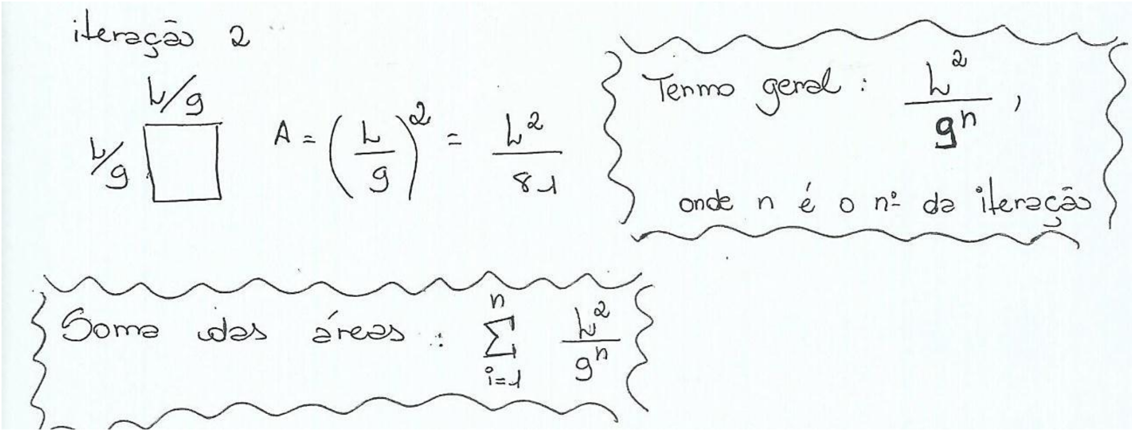
Dos oito licenciandos que acertaram parcialmente, o aluno A3 indicou corretamente o termo geral, mas apenas somou os quatro primeiros termos. A5 e A25 precisaram esboçar novamente os quadrados, indicando as medidas dos lados, para poderem encontrar o termo geral, conforme, respectivamente, as figuras 4 e 5, a seguir:

Figura 4 – Resposta de A5



Fonte: dados da pesquisa

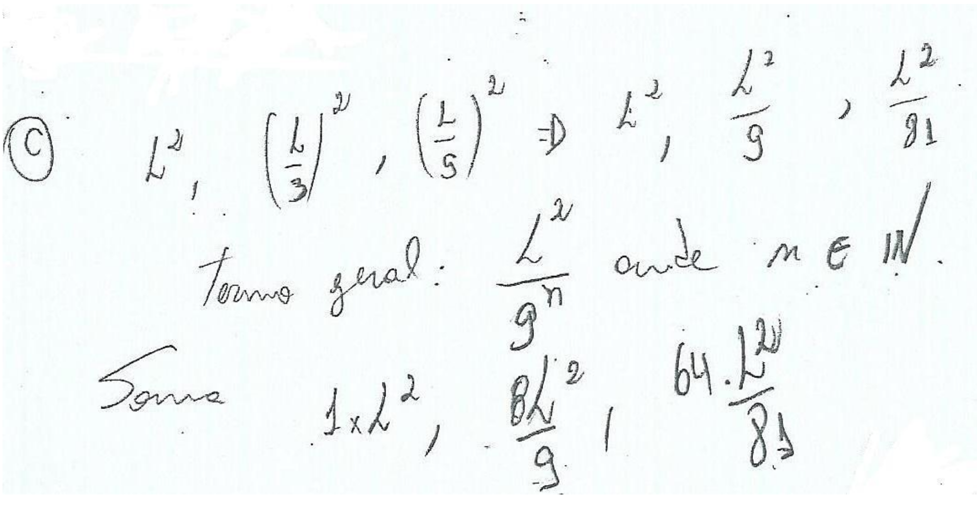
Figura 5 – Resposta de A25



Fonte: dados da pesquisa

Esses alunos mostram, assim, que precisam de uma representação figural para poder pensar no problema. A6 indicou a soma apenas com um somatório do termo geral para n variando de 1 a 5, evidenciando não só o desconhecimento de uma fórmula para a soma de termos de uma PG decrescente ilimitada, de razão q, |q|<1, como também restringiu a soma apenas a 5 elementos. Já os alunos, A7, A9 e A14 apenas indicaram o termo geral e o A19 indicou os três primeiros termos da sequência das áreas e o termo geral, mas, em seguida, somou esses três primeiros termos, como pode ser visto na Figura 6:

Figura 6 – Resposta do aluno A19



Fonte: dados da pesquisa

Esses licenciandos que não encontraram, ou indicaram erroneamente, a soma dos termos, parecem não ter identificado o objeto matemático, ou seja, não desenvolveram a atividade cognitiva de formação do conceito.

Nove licenciandos erraram as respostas do item (c). Os alunos, A2, A11 e A15 não converteram corretamente o enunciado para a linguagem simbólica, pois consideraram que cada termo da sequência das áreas é a diferença entre a área inicial e a área do quadrado da respectiva iteração. O A17 escreveu corretamente os dois primeiros termos da sequência das áreas, mas não mostrou o termo geral e só efetuou a soma desses dois termos. O A20 também indicou apenas dois termos da sequência, incorretos, e indicou sua soma. O A22 indicou a soma dos três primeiros termos da sequência dos lados. A23 só escreveu "L^2+" e não completou. A24 desenhou um quadrado, de lado L/3, depois outro, de lado $(L/3)^2$, e escreveu, como soma:

$$(\frac{L}{3})^2 + (\frac{L}{3})^2 = (\frac{L}{3})^4.$$

Ou seja, esta resposta, além de estar incorreta em relação ao conteúdo solicitado – soma das áreas -, é um erro recorrente, pois o aluno mostra confundir operações, visto que indicou a soma de quantidades iguais como sendo a soma dos expoentes das potências.

O aluno, A26 indicou o termo geral por $a_{n+1}= a_n$, o que não faz sentido, porque não se tem uma sequência constante, e indicou uma soma, $\frac{L}{1}+\frac{L}{2}+\frac{L}{3}+\frac{L}{4}\cdots$.

5. Conclusões

Conforme Duval (2012b, p. 315), "são os trabalhos dos alunos, obtidos no quadro das atividades a eles pedidas, que permitem estudar os problemas de compreensão em matemática". A apresentação e análise das respostas desses 26 licenciandos em Matemática à questão proposta, que envolve a representação figural do tapete de Sierpinski, mostrou que muitos desses futuros professores têm problemas, tanto de conhecimentos conceituais (sequências, P.G., soma de termos de uma P.G. ilimitada), como também de processos matemáticos, haja vista que não conseguem generalizar as representações para determinar o termo geral. Também são preocupantes os erros que Duval (2012b) chama de recorrentes, aqueles relativos à maneira de trabalhar em Matemática. Se um licenciando expressa uma dupla igualdade que, se resolvidas às equações correspondentes, gera um resultado absurdo, então esse futuro professor não tem condições de entender a atividade de tratamento em um mesmo registro, no caso, registro simbólico.

Faria, Santos e Curi (2012, p. 66), ao analisarem dados de uma pesquisa realizada com alunos de 3º ano de Ensino Médio, concluíram que a dificuldade encontrada por esses estudantes na transformação de conversão entre dois registros (gráfico para algébrico), "é proveniente da fragilidade que eles apresentam em ler as informações apresentadas em uma determinada representação semiótica", quando buscam traduzi-las em outro registro, sem alterar o objeto. Efetivamente, também para os participantes desta investigação, houve dificuldade em realizar transformações dos registros de representação em linguagem natural e em figuras para registros simbólicos e, em especial, para realizar tratamentos dentro do registro simbólico.

D´Amore (2005, p. 63) considera que a construção do conhecimento matemático deve se apoiar em três "ações" sobre os conceitos, a saber: "a capacidade de *representar* os conceitos, de *tratar* as representações obtidas no registro estabelecido e de *converter* as representações num registro para outro” (grifos do autor). No entanto, a conversão é a ação mais importante, porque somente quando um aluno consegue converter uma representação de um registro para outro é que se apropria do conhecimento sobre aquele conceito.

Em geral, em aulas de Matemática que envolvem as representações algébricas, os professores costumam reforçar o tratamento dos registros, levando os alunos ao que se costuma chamar de “algebrismo”; mas se não houve a formação do conceito envolvido, esses procedimentos algébricos não levam a um conhecimento duradouro. Nos erros, dos participantes desta pesquisa, foram vislumbradas tais dificuldades, pois muitos deles, mesmo quando conseguiam representar simbolicamente a sequência solicitada em cada item, não generalizavam os termos para apontar o termo geral ou então não pareciam entender os próprios símbolos que usavam.

Consideramos que, uma possibilidade de trabalho com licenciandos em Matemática, no tocante ao conteúdo de sequências numéricas, é apresentar, inicialmente, padrões figurais, que possam ser convertidos em uma representação algébrica ou tabular, facilitando as discussões sobre o conceito de sequência dentro de cada registro, bem como os possíveis procedimentos matemáticos envolvidos no cálculo, do termo geral e do limite de uma sequência.

6. Referências

D´AMORE, B. **Epistemologia e didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 61, p. 103-131, 2006.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a.

DUVAL, R. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino de matemática? **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul./dez. 2012b.

FARIA, R. R. de; SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. A transformabilidade dos registros de representação semiótica no ensino de equações de reta. **REVEMAT**, v. 7, n. 2, p. 53-68, 2012.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

LIMA, E. L. **Análise Real.** 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

VALE, I. Das tarefas com padrões visuais à generalização. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2009, Viseu, Portugal. **Actas**. Viseu: SIEM, 2009. p. 35-63.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. **Interacções**, v. 8, n. 20, p. 181-207, 2012.