ENGENHARIA DIDÁTICA COM O TEMA INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES NA VARIÁVEL COMPLEXA: ANÁLISES PRELIMINARES, A PRIORI E MODELIZAÇÃO DE SITUAÇÕES

DIDACTICAL ENGINEERING WITH THE THEME INTEGRATION OF COMPLEX VARIABLE FUNCTIONS: THE PRELIMINARLY ANALYSIS, A PRIORI AND MODELIZATION OF SITUATIONS

Francisco Regis Vieira Alves*
PGECM – IFCE – FORTALEZA - CE.

Resumo: O presente escrito aborda, discute e caracteriza as fases iniciais de um *design* de investigação e pesquisa em Didática da Matemática, com um tema envolvendo o processo matemático de integração de funções na variável complexa. Dessa forma, após a indicação de fatores preocupantes no âmbito da Transição Complexa do Cálculo – TCC, bem como a identificação de elementos de transição e elementos de ruptura no âmbito do seu ensino, apresenta elementos fundamentais que consubstanciam a etapa de análise preliminar e análise *a priori* e, logo em seguida, a concepção de situações-problema. Desse modo, ao assumir um papel distinguido para a visualização como componente preliminar para a promoção de um entendimento tácito e intuitivo para a noção simbolizada de modo *standard* por $\int_{\gamma} f(z)dz$, o trabalho fornece e acentua um conjunto de elementos que não podem ser desconsiderados numa transposição didática que se apoia na tecnologia atual e se mostra inspirada pela Teoria das Situações Didáticas – TSD.

Palavras-chave: Engenharia Didática, Integração de Funções, Análise Complexa, Visualização.

Abstract: This writting addresses, discusses and caracterizes the early stages of a research design in Didactics of Mathematics, with a theme involving the mathematical processs of integration of complex variable functions. Thus, after the indications of worrying factors within the Transition of Complex Calculus – TCC, and the identification of some transition and breaking elements within the teaching context, presents fundamental elements that embody the preliminary analysis stage and the *a priori* analysis and, shortly thereafter, the construction of some problem of situations. Thus, to take a dintinguided conception of the visualization as preliminar components for promoting an tacit and intuitive understanding for the standard symbolized notions as $\int_{\gamma} f(z)dz$, the work provides and enhances a numbers of elements that can not be disregarded in a didactical transposition that it is based on current technology and shows be inspired in Theory of Didatical Situations – TDS.

Keywords: Didactical Engineering, Integration of Functions, Complex Analysis, Visualization.

1. Introdução

Reconhecidamente, o período de estudos que marca a transição do contexto escolar para o contexto acadêmico, quando nos atemos à formação em conhecimentos científicos matemáticos, se mostra marcado por uma série de fatores preocupantes, envolvendo exigências

* fregis@ifce.edu.br

inéditas aos aprendizes. Por outro lado, acentuamos ainda uma preocupação com outra espécie de transição que, em nossa realidade dos cursos de graduação, quer sejam de licenciatura ou bacharelado, demandam uma exigência temporal que necessita de anos na academia para findar com sua conclusão.

De modo preciso, nos interessamos pelo período de contato dos estudantes com o processo de integração de funções, desde o primeiro estágio, quando lidam com funções na variável real, passando pelo trato de funções em várias variáveis e, finalmente, deparam um *corpus* teórico que permite a descrição de objetos e processos matemáticos na variável complexa. Ou ainda, expressando por uma via notacional, consideraremos a figura abaixo, que envolve significados cifrados e não evidencia ou indica mudanças conceituais e propriedades modificadas, em certos casos; invariantes em outros casos e, em decorrência da mudança notacional, propriedades matemáticas generalizadas.

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{transição}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{transição}}{\Rightarrow} \begin{cases} \int_a^b f(x,t)dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx \end{cases}, t\in IR \overset{\text{transição}}{\Rightarrow} \begin{cases} \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy, \int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \\ \int_a^{\infty}\int_c^{\infty} f(x,y)dxdy \end{cases} \overset{\text{transição}}{\Rightarrow} \int_{\gamma} f(z)dz$$

Figura 1. Transição simbólico conceitual para o caso do processo matemático de integração (elaboração do autor)

Logo após enfrentar um processo de transição da escola para a academia, em que os estudantes deparam, inclusive, um pensamento científico e a mudança de rigor, novas exigências e habilidades, se mostram condicionadas pela mudança simbólico-conceitual. Dessa forma, quando tomamos como referência um corpus teórico, característico da teoria das funções em uma variável real, em várias variáveis e, ainda, da teoria das funções na variável complexa, a figura 1 evidencia uma demarcação de nosso interesse preliminar que busca discutir, explicitar e apontar um processo de “transição interna”, ao decorrer dos estudos compulsórios acadêmicos que, nas universidades brasileiras, como já mencionado, podem demandar/concorrer alguns anos. Dessa forma, diante deste contexto de discussão, descreveremos uma Engenharia Didática com o tema envolvendo o processo de integração de funções na variável complexa.

Indicaremos, todavia, a perspectiva de alguns escritos científicos que pretendem alertar para os entraves e obstáculos no âmbito da Transição Complexa do Cálculo – TCC e, dessa forma, sem mais delongas, acentuaremos elementos apontados por tal perspectiva, com ênfase ao processo de integração de funções do tipo $f(z) = u(z) + iv(z)$.

2. Transição Complexa do Cálculo

De modo prosaico, identificamos fatores que podem atuar de modo benéfico para o processo de ensino e da aprendizagem, bem como, outros elementos que podem dificultar, atrasar e, mesmo, bloquear o processo de elaboração de conhecimentos relativos ao contato com funções da variável real para o contexto de funções na variável complexa. Seguindo um pensamento semelhante ao caso da Transição Interna do Cálculo – TINC discutido por Alves (2011; 2014a; 2014c; 2014d) em sua tese, indicaremos duas classes de fatores: (i) elementos de transição; (ii) elementos de ruptura.

Com um ponto de vista semelhante ao caso da *TINC* (ALVES, 2011; ALVES, BORGES NETO & ALVES DIAS, 2012) podemos afirmar que os elementos de transição envolvem uma natureza que permite ao aprendiz readaptar, generalizar, manter ou aprofundar seus conhecimentos, na medida em que verificamos a mudança da variável $x = x + i0 \Rightarrow z = x + iy$. Por outro lado, o conjunto (ii) envolve fatores cuja natureza dificulta, retarda ou mesmo impede uma readaptação dos conhecimentos apreendidos no Cálculo Integral em uma variável real para o Cálculo Integral na variável complexa, passando pelo Cálculo em várias variáveis.

Isso posto, sem considerar de modo pormenorizado uma profusão de exigências impostas aos estudantes, segundo nosso expediente, indicado na figura 1, vemos a descrição de aspectos que carecem de vigilância quando vislumbramos a seguinte transição $\int_a^b f(x)dx \overset{transição}{\Rightarrow} \int_\gamma f(z)dz$ (*). Sua identificação deverá nos auxiliar na constituição e processo acumulativo de saberes didáticos e metodológicos, tendo em vista o ensino de Análise Complexa – AC (ALVES, 2014b; 2014c; MARINHO & ALVES, 2016). De modo sistemático, relativamente ao que indicamos em (*), apontamos:

- A concepção geométrica da integral definida como uma área abaixo de uma curva do tipo $y = f(x)$ não é preservada no estudo das funções do tipo $f(z) = \mathrm{u(z)} + \mathrm{iv(z)}$;

- A definição do cálculo da integral num intervalo $[a,b] \subset IR$ é substituído por uma noção mais geral abstrata, envolvendo a determinação da integral na variável complexa, sobre uma curva, suave, por partes, orientada no sentido anti-horário, no plano complexo;

- Para funções que admitem primitiva, no caso da variável real teremos que existe uma $F(x)$, de modo que $F'(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)}$, para $\mathrm{x} \in [a,b] \subset IR$. Por outro lado, segundo as mesmas condições, podemos esperar uma simbologia e condição semelhante no caso da variável complexa, entretanto, nesse último caso, o símbolo da derivada em cada ponto não poderá ser mais entendido pelos estudantes como o valor numérico da declividade de uma reta tangente ao gráfico de $f(z)$, que simbolizamos por $F'(\mathrm{z}) = \mathrm{f(z)} = \mathrm{f(x+iy)}$;

- No processo indicado em (*), os estudantes passam a se preocupar com dois processos matemáticos de integração, como condicionado pelo seguinte particular sistema notacional;

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(z)+iv(z))(dx+idy) = \underbrace{\int_\gamma (\mathrm{u(z)\,dx - v(z)\,dy})}_{Parte\ \mathrm{Real}} + i\underbrace{\int_\gamma (\mathrm{v(z)\,dy + v(z)\,dx})}_{\mathrm{Parte\ Imaginária}}$$

- O resultado do processo de integração segundo Riemann, na variável real, pode ser indicado por $\int_a^b f(x)dx \in IR \cup \{+\infty\}$, todavia, na variável complexa, pode ocorrer que $\int_\gamma f(z)dz \in C \cup \{\infty\}$, posto que, não tem sentido o símbolo $+\infty$ ou $-\infty$ em C;

- O domínio de integração de uma função de uma variável real é um subconjunto da reta, enquanto que o domínio de integração de uma função em duas variáveis reais é um subconjunto do IR^2, todavia, o domínio de integração de uma função na variável complexa é uma linha ou um caminho no plano complexo;

- O Teorema Fundamental do Cálculo estudado na variável real, sob devidos ajustes, permanece válido na passagem para a variável complexa.

Assinalamos que, em dependência das características da transposição didática (CHEVALARD, 1991) que busquemos implementar em sala de aula, os elementos listados há pouco podem atuar como elementos de transição de natureza epistemológica, histórica, metodológica ou cognitiva. E, de modo similar, podem se manifestar como elementos de ruptura de natureza epistemológica, histórica, metodológica ou cognitiva.

Ora, podemos identificar um elemento de ruptura de natureza histórica e epistemológica a partir das ponderações de Shokranian (201, p. 143) ao recordar que:

> *Na teoria das funções reais, originalmente, a integração foi usada para calcular a área de uma figura geométrica ou o volume de um sólido. Diferentemente, na variável complexa, a teoria da integração é uma ferramenta para estudar funções analíticas, tais como os Teoremas de Cauchy e outros que mostraremos. Por outro lado, uma das aplicações fundamentais das integrais das funções complexas é também o cálculo das integrais definidas de uma variável real [...]*

Com arrimo do excerto anterior, constatamos um teor abstracionista mais elevado, quando comparado aos primeiros rudimentos do Cálculo (BOYER, 1949; BOURBAKI, 1984). Nesse sentido, vale apreciarmos a abordagem clássica formalista de Neto (1993), quando considera uma 1-forma diferencial $\omega = A(z)dx + B(z)dy$ contínua num conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}$. Define, então, a integral abstrata de ω ao longo de um caminho de classe C^1 como sendo o número complexo $$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[A(\gamma(t))\alpha'(t) + B(\gamma(t))\beta'(t) \right] dt$$, em que $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, com $t \in [a,b]$.

Por outro lado, quando nos atemos ao processo de integração segundo Riemann, nos parece claro que o principal alvo diz respeito à determinação de uma área. Não obstante, no caso da integração complexa, o processo é revertido (NEEDHAM, 2000, p. 383). Com efeito, Needham (2000, p. 383) observa que a ideia é generalizar a noção de integrais no campo dos reais e, depois disso, “nos questionamos o que criamos!”.

O autor considera uma função $f(z)$ e descreve, segundo sua perspectiva, a integração complexa entre os pontos indicados na figura abaixo por a e b. Temos ainda uma curva no plano ligando tais pontos. Needham (2000, p. 384) explica que “a curva K faz o mesmo papel dos intervalos de integração segundo Riemann.”. Particionamos, pois, a curva K em pequenos passos Δ_i que, convenientemente, escolhemos de mesmo comprimento (ao lado esquerdo). Na figura 2 divisamos os vetores de comprimentos Δ_i indicados pelo autor. Note-se ainda a variação que ocorre na direção em cada passo $\Delta_i \to \Delta_{i+1}$.

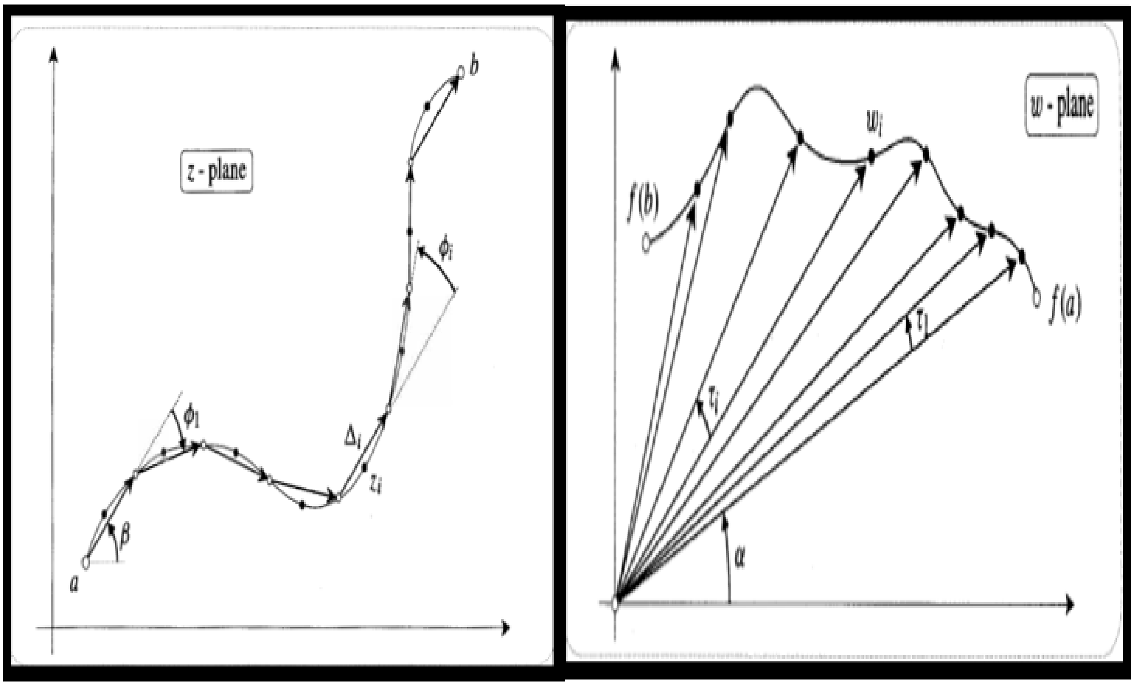

Figura 2. Descrição de uma curva K ligando os pontos a e b no plano complexo (NEEDHAM, 2000)

Needham (2000, p. 384) distingue o processo de integral segundo Riemann na variável real do processo de integração complexa. No primeiro caso, preservamos sempre a mesma direção dos vetores (na direção do eixo Ox), enquanto que, na figura 2 (ao lado esquerdo), observamos as variações angulares na direção, que Needham indica por ϕ_i. De fato, a fim de descrever uma soma de Riemann, tomamos de modo aleatório os elementos z_i, de cada pequeno segmento em K e formamos a seguinte expressão $f(z_i)\Delta_i$. Finalmente, fazemos crescer os números, fazendo com que os elementos Δ_i se aproximem de K. A expressão semelhante à soma de Riemann tenderá a um valor limite (na condição em que f seja contínua). Seu valor será denotado por $\int_K f(z)dz$.

Needham (2000, p. 384) indica vários elementos que encerram semelhança com o caso real. Por exemplo, podemos obter uma expressão aproximada da integral, sem passar ao limite, tomando os pontos médios dos segmentos em K.

Tal processo é descrito na figura 2. Neste modo especial de aproximação para a soma de Riemann, o autor denota seu resultado por R_M. O autor desenvolve uma argumentação que permite/possibilita o entendimento geométrico particular para R_M (ver na figura. 3). Na figura 2, divisamos a imagem de K por intermédio de $z \mapsto w = f(z)$ e a somação passa a ser indicada, então, na figura 3, por intermédio de um processo construtivo de aproximação.

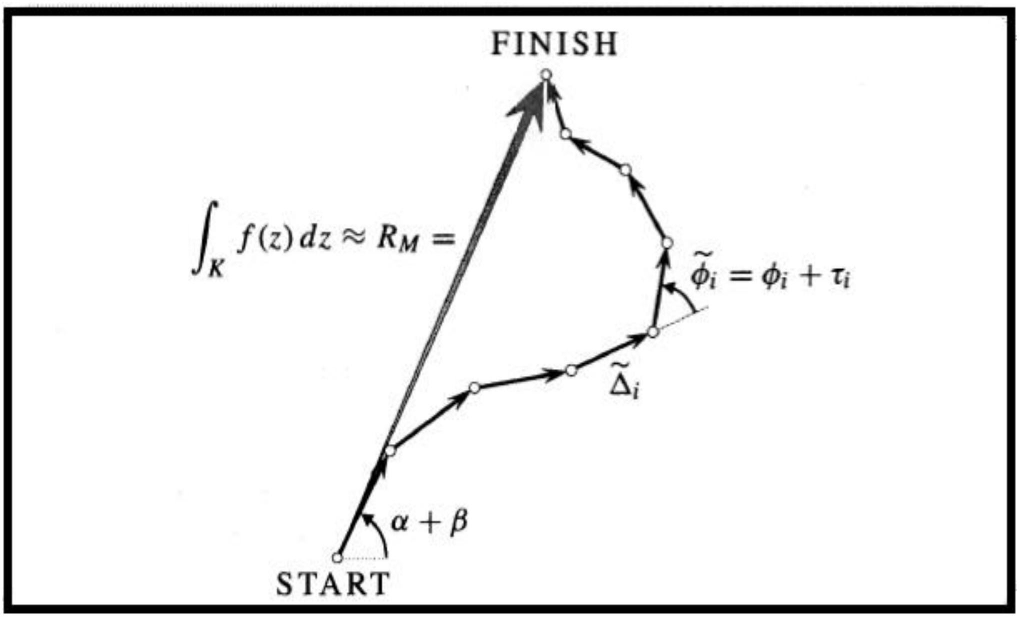

Figura 3. Needham (2000) indica o significado geométrico do resultado de um processo de integração na variável complexa

De modo particular, na figura 3, notamos $z_i \mapsto w_i = f(z_i)$. Assim, o termo correspondente em R_M será então $\Delta_i = w_i\Delta_i$. E, “escolhemos pensar sobre ele como uma seta resultado da interação de w_i sobre Δ_i (NEEDHAM, 2000, p. 384). Para concluir, a abordagem de autores como Needham (2000), Polya & Latta (1974) e Wergert (2012) pode ser contrastada com outras que tornam hegemônico um trato formal e analítico (CECÍLIA & BERNADEZ, 2008; CONWAY, 1978; FLANINGAN, 1972; LINS NETO, 1993; GONG, 2001; RUDIN, 1986; SCHWERDTFEGER, 1979; SOARES, 2014; SHOKRANIAN, 2011).

No próximo segmento, tendo em vista a eleição de uma problemática no âmbito de ensino que tencionamos discutir, trazemos ao leitor uma apreciação sobre alguns aspectos de uma modalidade ou *design* de investigação e pesquisa no campo da Didática da Matemática sob forte influência da vertente francesa.

3. Engenharia Didática - ED

Como consequência da organização científica e a sinergia implementada na França, sobretudo no final dos anos 60 e, com maior proeminência, entre as décadas de 80 e 90, constatamos a demarcação e a evolução, graças a um processo cumulativo de escritos científicos, da pesquisa em Didática da Matemática (BROUSSEAU, 1986; 1988; 1994). Tal vertente de estudos adquiriu um substrato científico em decorrência, originalmente, do interesse em torno dos fenômenos relacionados com o ensino e a aprendizagem em Matemática, em seus diversos níveis (DOUADY, 1995a; 1995b).

Desse modo, uma profusão de trabalhos permitiu a consolidação e a demarcação de um campo de estudos, bem como a evolução de um *design* de investigação cientifica, que se apoiou numa metáfora que remete a um planejamento sistemático de um engenheiro, tendo em vista a concepção e ajuste de um projeto preciso. Desse modo, a terminologia Engenharia Didática – ED foi usada para designar um *modus operandi* de investigação ou ainda como "uma metodologia para a análise de situações didáticas" (BRUM & SCHUHMACHER, 2013) e, também

> *Trata-se de etiquetar, de certa forma, uma forma de trabalho didático, comparável ao do engenheiro, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre diversos* conhecimentos *científicos de seu domínio, aceita a se submeter a um controle do tipo científico e, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar com objetos mais depurados da ciência [...] (ARTIGUE, 1996, p. 243)*

A constatação da ED como metodologia de pesquisa se caracteriza como um esquema experimental baseado num conjunto de experimentações e realizações didáticas em sala de aula. Artigue (1996, p. 247) indica as seguintes etapas: concepção, realização, observação e a análise de sequências de ensino. Mas, do ponto de vista da ação experimental e tempo investigativo, Artigue distingue ainda: (1) fase de análises preliminares; (2) fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas; (3) experimentação e, por fim, (4) análise *a posteriori* e validação de todo aparato construído.

No presente escrito restringir-nos-emos aos itens (1) e (2) há pouco indicados. Desse modo, na medida em que indicaremos um problema ou entrave, efetuamos "o primeiro passo para uma Engenharia Didática" (DOUADY, 2008, p. 2). Isso posto e tendo como cenário de apreciação a Transição Complexa do Cálculo - TCC, indicaremos a relevância da seguinte problemática: Os estudantes manifestam dificuldades para o entendimento geométrico do processo de integração de funções na variável complexa.

Ora, os entraves apontados na literatura no Cálculo em uma Variável Real – CUV e no Cálculo em Várias Variáveis – CVV (ALVES, 2011) se mostram de natureza variada, todavia, desenvolveremos nosso expediente no sentido de extrair implicações para o ensino de AC e, desde que, o entendimento geométrico (ALVES, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d) deverá assumir posição de destaque com o escopo de perspectivarmos elementos capazes de formularmos mais conhecimentos didáticos sobre o tema, discutiremos a exploração de um *software* (GeoGebra), tendo em vista a concepção, descrição e proposição de situações didáticas (BROUSSEAU, 1986).

Tendo em vista os problemas de ordem epistemológica, identificados nas seções anteriores, e outros enquadrados no mesmo jaez, elegemos a seguinte questão de investigação: Como conceber situações didáticas para o ensino do processo de integração na variável complexa tendo em vista evitar ou, pelo menos, diminuir o efeito dos elementos de ruptura e acentuar o papel de elementos de transição?

Dessa forma, indicamos as seguintes hipóteses de investigação: (a) uma mediação afetada pelo uso do *software* proporciona elementos que estimulam a mobilização de uma raciocínio apoiado na visualização e proporciona a compreensão de conceitos em AC; (b) o *software* proporciona um entendimento sobre o resultado (significado) final do processo de integração na variável complexa; (c) o *software* permite um entendimento do processo construtivo de elaboração das somas de Riemann que definem a integral $\int_K f(z)dz$.

4. Análises Preliminares

Dois elementos devem ser evidenciados nessa etapa de acordo com Almouloud (2007, p. 172), a saber: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido. Relativamente ao primeiro item, indicamos a relevância do entendimento do processo matemático de integração, desde os seus rudimentos na variável real e, alguns séculos depois, a busca pela sua generalidade e consistência das estruturas construídas em que foram estabelecidas os fundamentos da teoria das funções na variável complexa (BOTTAZZINI, 1986; BOTTAZZINI & GRAY, 2013; GRAY, 2015; DEBNATH, 2015; HAIRER & WANNER, 2008; MEDVEDEV, 1991; SCHUBRING, 2005).

Outrossim, no que concerne o entendimento do ensino atual, por intermédio de uma apreciação preliminar de alguns compêndios da área (SOARES, 2014), podemos depreender que o trato analítico, formalizante e estrutural, continua hegemônico, enquanto que, apesar de em menor quantidade, deparamos autores que assinalam o componente heurístico do assunto (KRANTZ. 1990; NEEDHAM, 2000; POLYA & LATTA, 1974). No que concerne ao item (ii), não pretendemos realizar uma análise de diferentes instituições de ensino em que o saber ou assunto integração de funções na variável complexa deve ser ensinado, tendo em vista a possibilidade da compreensão do tratamento institucional do assunto. Nem muito menos tencionamos desenvolver uma análise de propostas curriculares, como assim indica Almouloud (2007, p. 172).

5. Análise *a priori*

A presente etapa, seguindo o procedimento *standard* das investigações dessa vertente, busca responder às questões levantadas e validar, refutar ou modificar as hipóteses indicadas há pouco. Por intermédio de um apelo mnemônico, Brum & Schuhmacker (2013) indicam os elementos essenciais da fase atual. E, dando continuidade, “o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema” (ALMOULOUD, 2007, p. 174).

Ademais, “as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos” (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Por fim, na etapa da *análise a priori*, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever o comportamento dos alunos, o que se coaduna com o que prevê Artigue (1995).

Desse modo, exploraremos situações relacionados com o uso da noção de integral de linha que, de modo geral, registramos sua abordagem, por partes dos compêndios especializados, com ênfase hegemônica no viés eminentemente algébrico, formal e estruturante (ALVES, 2015). Na próxima seção assumiremos um ponto de vista importante que deverá envolver a noção de concepção que, de acordo com Artigue (1990, p. 265) se caracteriza por “colocar evidência uma pluralidade de pontos de vistas possíveis sobre um mesmo objeto matemático, distinguir suas representações e os modos de tratamento que são associados ao mesmo, colocar em evidência sua adaptação mais ou menos eficaz a uma resolução de um ou vários problemas". Sob tal perspectiva, defendemos melhores condições do alcance de objetivos e confirmação/confrontação de hipóteses, caso o aparato conceitual a ser construído seja aplicado eventualmente em sala de aula.

6. Concepção e modelização das situações

De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2008, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deve proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância das variáveis micro-didáticas (ver figura 2) eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga predizer as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle. Dessa forma, apresentamos nossa primeira situação.

Figura 2. Brum & Schuhmacker (2013, p. 70) vislumbram os elementos essenciais cotejados na análise a priori de um ED e seu encaminhamento

Situação-problema I: Dados os vetores no plano complexo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e, considerando um caminho γ suave por partes, orientado no sentido anti-horário que une os dois vetores, decidir o comportamento de convergência/divergência da seguinte integral $\int_{\gamma} e^z dz$.

Comentários: A situação anterior deve transmitir o significado geométrico relacionado com a noção do processo de integração na variável complexa. Os números complexos são tratados como vetores! Ademais, com recurso ao *software*, os estudantes podem vivenciar um clima de investigação e debate em sala de aula em torno dos significados mobilizados e identificados por intermédio da visualização e processo construtivo da integral.

Situação de ação. Os alunos devem ser orientados em acessar uma planilha eletrônica do *software Geogebra*. Assim, devem considerar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no plano complexo. Logo em seguida, criamos o vetor u=Vector[a,b]/10+0*i. Daí, os alunos são estimulados a pensar num caminho, o mais simples possível, que une os vetores tomados inicialmente. Tais vetores deverão ser pensados como os seguintes elementos $\overrightarrow{\Delta_i}$, com $1 \le i \le 10$ e, com origem na janela do *software GeoGebra*, criamos uma listagem na coluna A inserindo valores de 0 até 11 (ver figura 4, ao lado direito).

Estimulamos os estudantes na descrição da coluna B e devem tomar B1 = a e B2= B1 + $\vec{u}$. Na figura abaixo divisamos o resultado da construção a ser implementada pelos estudantes. Sendo assim, na mesma figura, ao lado direito, listamos os pontos B1, B2, B3,...,B11. Por conseguinte, os estudantes devem criar o seguinte vetor, na coluna C, dado por C2=vetor[B1,B2]. Na listagem fornecida pelo *software*, os estudantes devem buscar a janela "preferências" e modificar a forma matricial indicada pelo *software* para a forma *standard* de descrição de um número complexo (ver figura 5, ao lado direito). Na figura abaixo divisamos uma construção correspondente com a função $f(z) = e^z$.

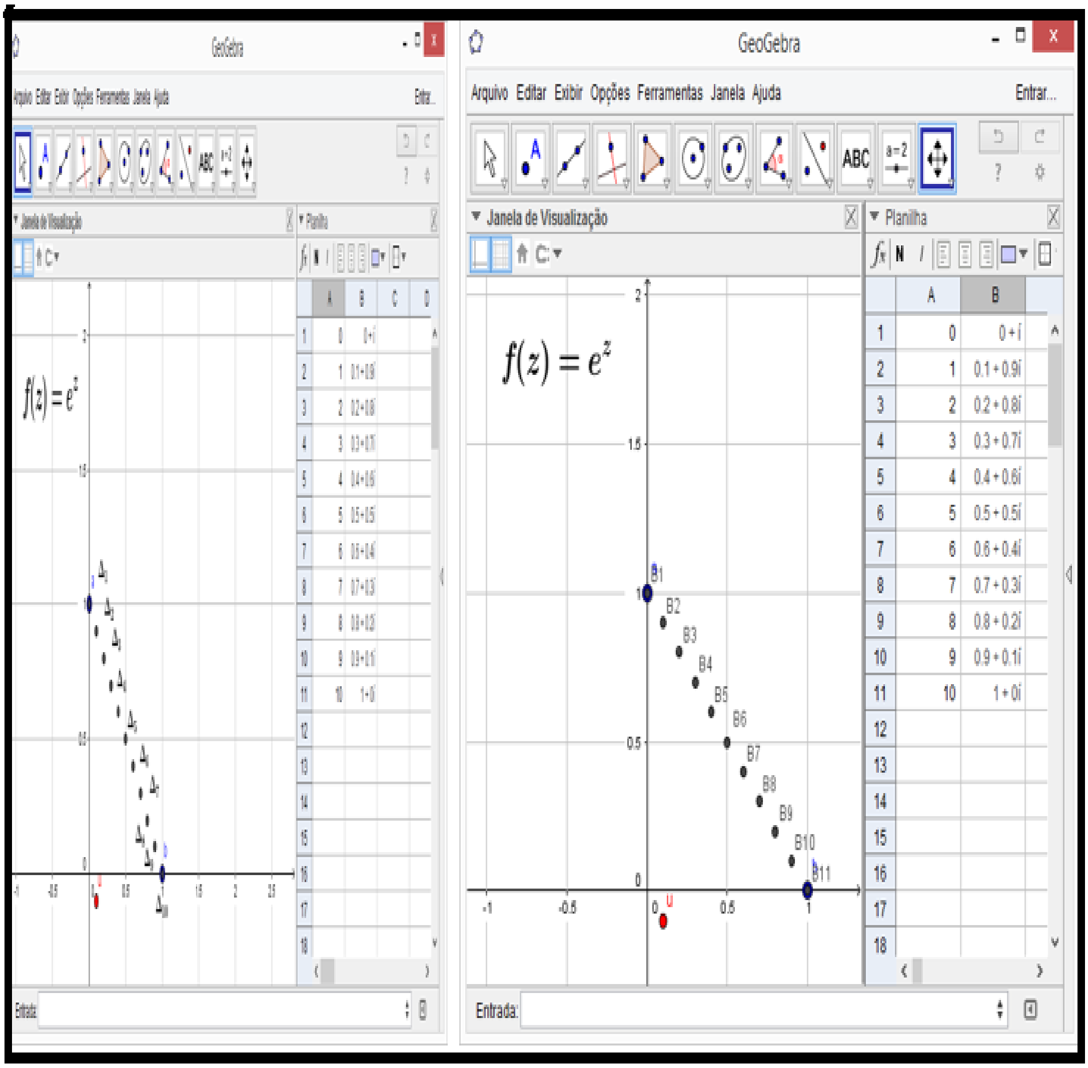

Figura 4. Visualização do processo de integração de uma integral definida na variável complexa (elaboração do autor)

Em seguida, na figura 5 ao lado direito, os alunos devem visualizar os vetores que desempenham o papel dos elementos $\overrightarrow{\Delta_i}$. Todas as coordenadas devem ser descritas como números complexos e, facilmente, o *software* permite tal alteração dinâmica e interativa.

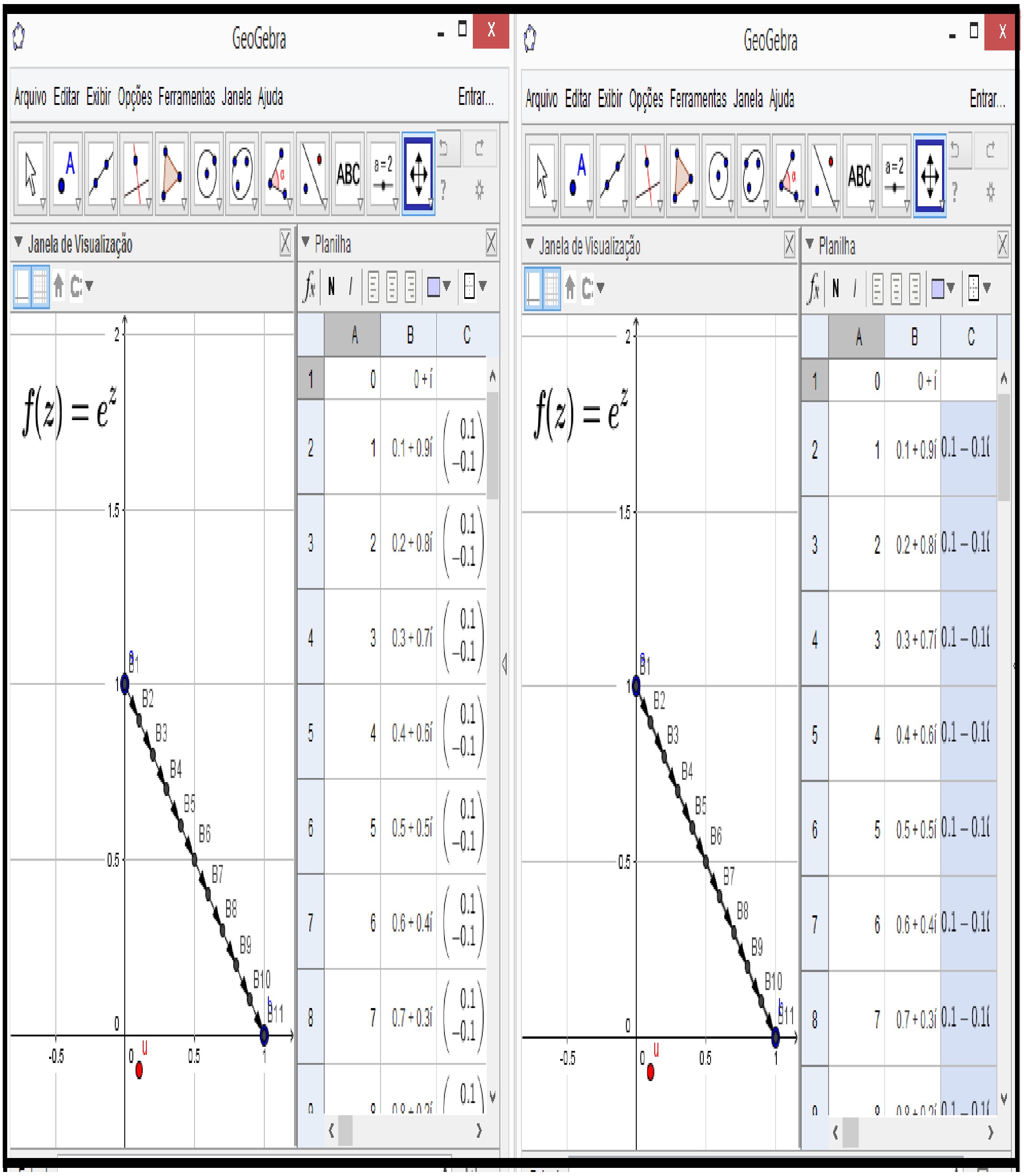

Figura 5. Escolha de um caminho que liga os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no plano complexo e valores numéricos associados ao processo de integração (elaboração do autor)

No passo seguinte, descrevemos a coluna D. Assim, os alunos devem definir D2= =B2-u/2 (ver figura 6, ao lado esquerdo). E, após isso, passam a descrever o comportamento da função (contínua) integranda $f(z)=e^{z}$, através da definição dos valores na tabela E, indicados pela expressão E2=e^D2. No que segue, os alunos devem arrastar a célula escolhida até a posição A11 (ver figura 6, ao lado direito).

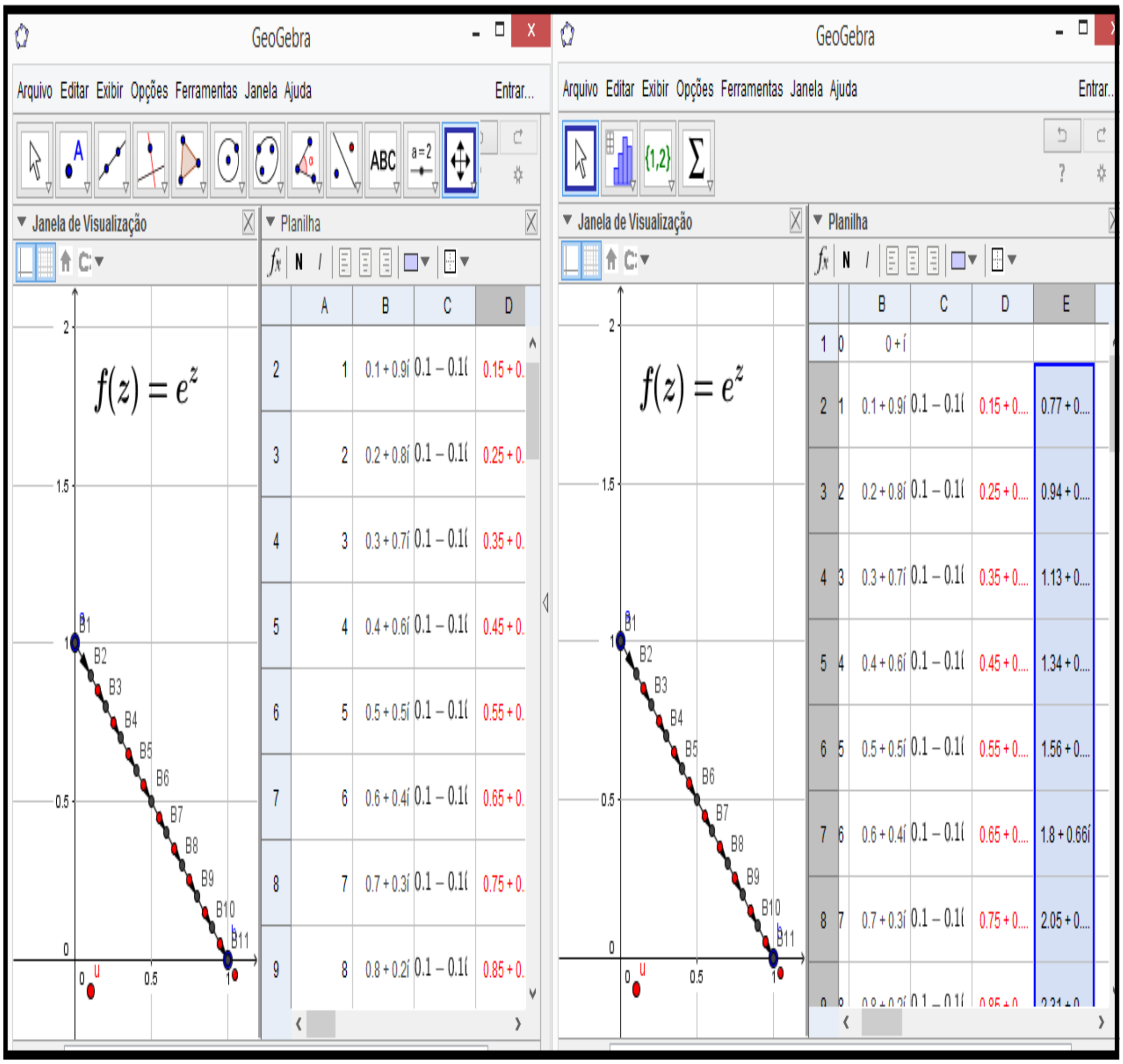

Figura 6. Visualização da escolha dos elementos da partição no caso da variável complexa (elaboração do autor)

Para concluir e em sintonia com o modelo das somas de Riemann, o professor deverá orientar os estudantes na avaliação de expressões do tipo $f(z_i)\cdot\Delta_i$ e, em seguida, prever o comportamento da somação indicada por $\sum_{i=1}^{11} f(z_i)\cdot\Delta_i$. Ora, para isso, eles devem descrever a coluna F2, ao indicar os elementos do tipo F2=E2*C2. E, para designar a soma de Riemann anterior, os alunos são orientados em assumir G1=0+i*0 e G2=G1+G2 (ver figura 7 e 8).

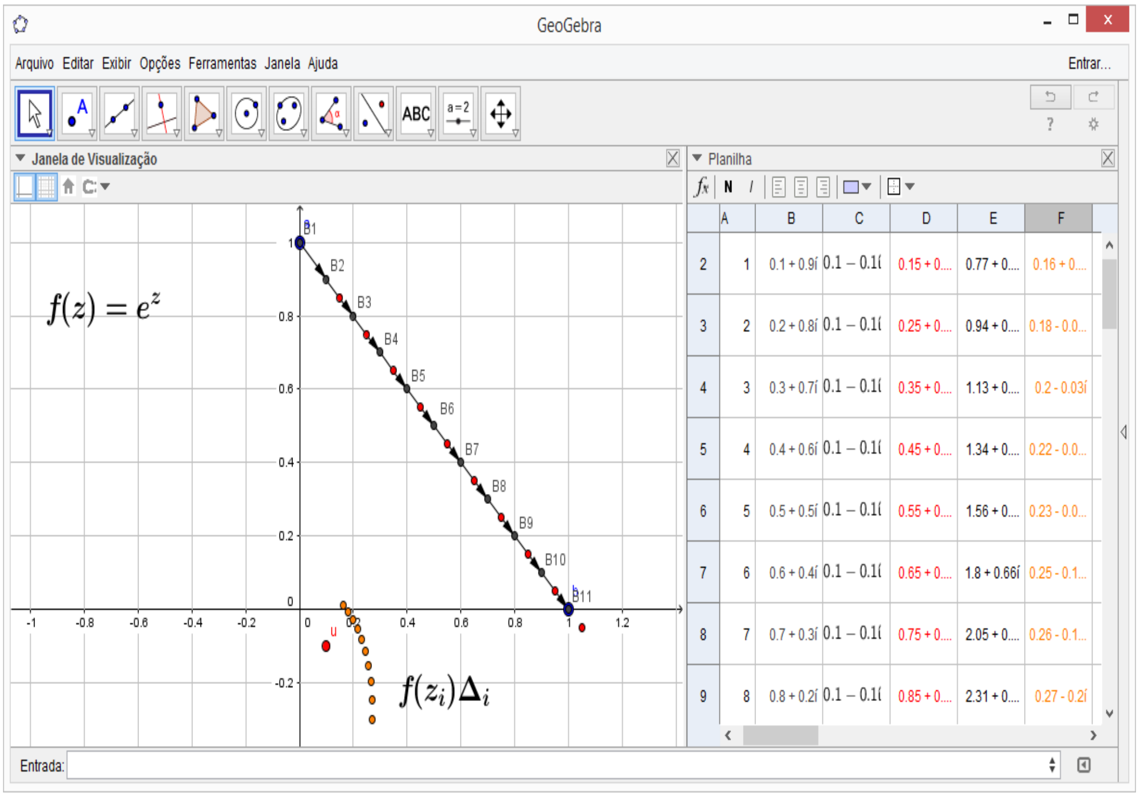

Figura 7. Visualização dos vetores indicados na representação da soma de Riemann (elaboração do autor)

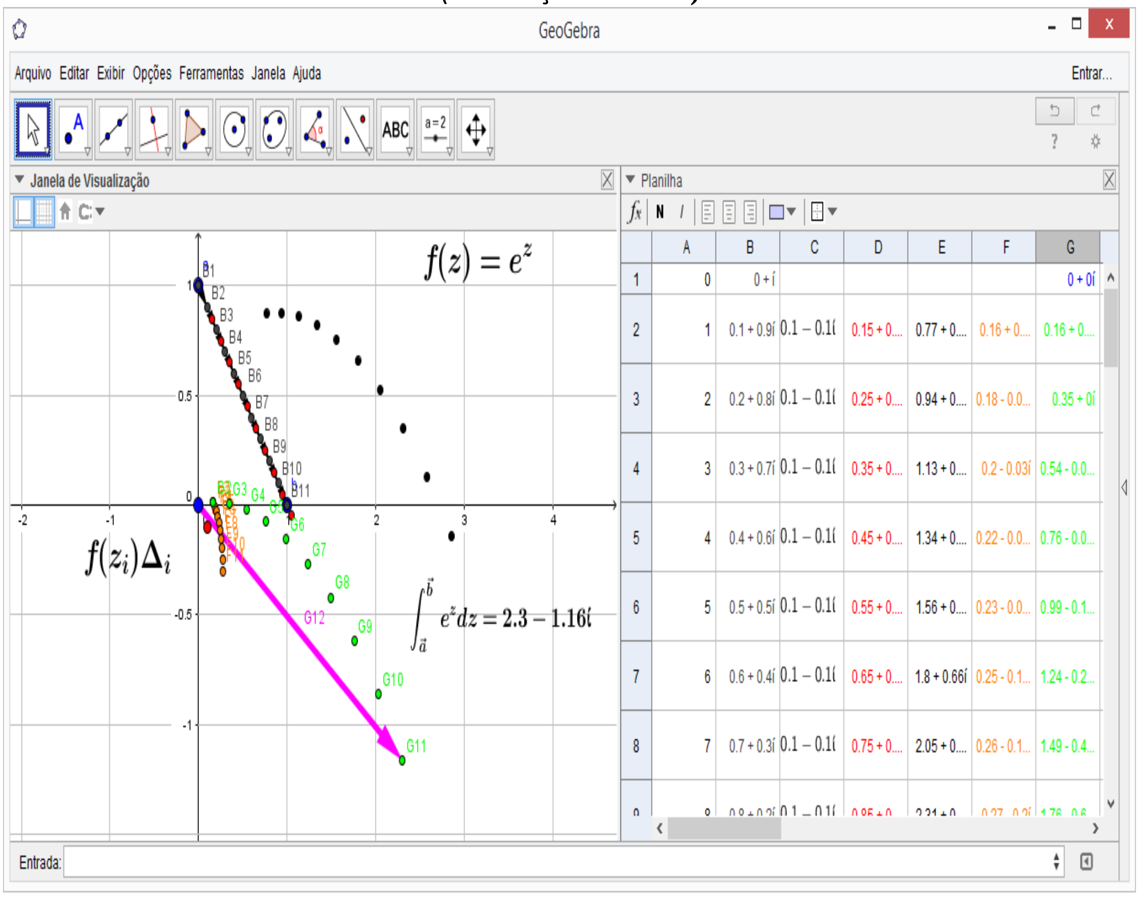

Figura 8. Visualização e descrição geométrica da noção de integral na variável complexa por intermédio da descrição vetorial de um número complexo (elaboração do autor)

Situação de Formulação. Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate e da dialética "permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns".

Nesse caso, o professor deverá estimular a adoção de um sistema particular simbólico que proporcionará a descrição dos elementos conceituais assinalados na fase dialética anterior. Desse modo, ao admitirem que $\vec{a} = 0 + i$ e $\vec{b} = 1 + i0$. Logo em seguida, tendo em vista um caminho parametrizado que liga os vetores anteriores, podem assumir que $\vec{\gamma}(t) = t \cdot \vec{a} + (1-t) \cdot \vec{b} = t(0,1) + (1-t)(1,0) = (1-t, t)$, com $0 \le t \le 1$, orientado no sentido anti-horário e une os pontos $\vec{\gamma}(0) = \vec{b}$ e $\vec{\gamma}(1) = \vec{a}$. Pelo intermédio da definição de integral de linha, formulam o seguinte expediente notacional:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 e^{\gamma(t)} \cdot (-1,1)dt = \int_0^1 e^{(1-t)+it} \cdot (-1,1)dt = \int_0^1 \left(e^{(1-t)} \cos(t), e^{(1-t)} sen(t) \right) \cdot (-1,1)dt$$

$$= \int_0^1 e^{(1-t)} sen(t) - e^{(1-t)} \cos(t)dt = \int_0^1 e^{(1-t)} sen(t)dt - \int_0^1 e^{(1-t)} \cos(t)dt \,.$$

Reparemos acima, por exemplo, a seguinte integral $\int_0^1 e^{(1-t)} sen(t)dt$, indicada agora na variável real. Antevemos que os estudantes poderão empregar algum método *standard* de integração, por exemplo, o método da substituição por partes (ALVES & LOPES, 2013). Os valores numéricos deverão ser confrontados com os dados obtidos quando a resolução evolui apenas com o uso da variável complexa, o que proporciona elementos para a testagem das hipóteses (b).

Situação de validação. Na fase atual, diferentemente da estratégia anterior, empregaremos apenas o modelo na variável complexa. Por outro lado, recordamos que, diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário "provar o que foi afirmado na fase anterior" (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8).

Desse modo, teremos $\int_{\gamma} e^z dz = \int_{1+i*0}^{1+i*0} e^z dz = \left[e^z \right]_1^i = e^i - e^1 = e^i - e$. Nesse caso, os estudantes podem empregar ainda o Teorema Fundamental do Cálculo na versão da variável complexa, levando em consideração que a função $f(z) = e^z$ é infinitamente diferenciável. Podemos notar que $e^{0+i1} = e^0 \left(\cos(1) + isen(1) \right) = 0,54 + 0,84i$ e que $\int_{\gamma} e^z dz = e - e^i = 2,72 - 0,54 - 0,84\mathrm{i} = 2,18 - 0,84\mathrm{i}$. Reparemos que tal valor deve ser confrontado/comparado com a construção que exibimos na figura 8!

Situação de institucionalização. A última fase é marcada por uma ação metodológica que visa fazer aderir a um conhecimento local, mobilizado pelos estudantes nas fases anteriores, uma categoria de um saber científico, revestido de um caráter a ser incorporado ao repertório dos saberes científicos que o grupo deve possuir, e que se apresentam condicionados por uma determinada instituição.

Por essa via, o conhecimento matemático que o *expert* deverá convencionar ou fixar (ARTIGUE, 1984, p. 8), seguindo os rituais acadêmicos, o estatuto cognitivo de um novo saber, rico em relações conceituais e, como apontamos, inclusive com relações com a Análise Complexa. Em nosso caso, discutimos o comportamento numérico da integral $\int_{\gamma} e^z dz$, cuja função integranda indicamos por $f(z)=e^z$ se mostra contínua e infinitamente diferenciável, portanto, a integral $\int_{\gamma} e^z dz \in \mathbb{C}-\{\infty\}$ será convergente e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, versão complexa, seu valor deverá depender apenas dos pontos final e inicial que jazem sobre uma curva $\gamma(t)$.

Outrossim, a mediação anterior buscou enfatizar um processo construtivo de elaboração da integral anterior, semelhante ao caso da integral de Riemann, com recurso no *software*. Os elementos coligidos nessa sessão auxiliam na testagem da hipótese (a) e (b).

Situação-problema II: Dados os vetores no plano complexo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e, considerando um caminho γ suave por partes, orientado no sentido anti-horário que une os dois vetores no primeiro quadrante delimitado por uma circunferência. Decidir, pois, o comportamento de convergência/divergência da seguinte integral $\int_{\gamma} z^2 dz$. Comentários: O aspecto diferenciado relativamente ao caso anterior diz respeito da opção por um caminho mais geral, neste caso, uma circunferência. Ademais, os passos construtivos de elaboração da integral são repetidos, com ligeiras modificações, sobretudo, na descrição das colunas B e D (ver figura 9).

Situação de ação. Mais uma vez, assumiremos um papel fundamental para a visualização (ALVES, 2014a) tendo em vista a identificação e a percepção de propriedade qualitativas e, dessa forma, promovemos um cenário de aprendizagem propício ao alcance dos objetivos e hipóteses escolhidas nas seções precedentes.

Dessa forma, no momento inicial, orientamos nossos alunos escolher um caminho diferente, por exemplo, sobre uma circunferência. Assim, eles devem tomar A1=0+i*0 e A2=pi/64. Logo em seguida, selecionar A1 e A2 e arrastar a célula, ao longo da coluna A, até a posição A33. Em seguida, devem tomar o vetor B1=(2;A1) e, com auxílio do *software*, efetuar sua conversão como número complexo e listar todos os elementos até a posição B33, repetindo o processo anterior.

Depois, para a descrição da coluna D, os alunos devem ser orientados a determinar D2=(2;A1+pi/128) e arrastar tal vetor até a posição D33. Após isso, os estudantes precisam descrever os valores assumidos pela função correspondentemente à partição que tomamos inicialmente que, nesse caso, descrita por $f(z)=z^2=(x+iy)^2=\left(x^2-y^2,2xy\right)$.

Dessa forma, devem descrever E2=D2*2 e arrastar o cursos sobre a célula até a posição E33. E, para a elaboração das colunas F e G, repetem o raciocínio e procedimento de construção empregado na primeira situação. Por fim, com o intuito de visualização a representação geométrica e numérica para a integral

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{\gamma} (x+iy)^2 (dx+idy) =$$
$$= \int_{\gamma} (x^2 - y^2 + 2\,xyi)(dx+idy) = \int_{\gamma} \left[\left(x^2 - y^2\right) dx + 2xyidx + i(x^2 - y^2)dy - 2xydy \right]$$
$$= \int_{\gamma} (x^2 - y^2)dx - 2xydy + i \cdot \int_{\gamma} \left(x^2 - y^2\right) dy + 2xydx$$

com $\vec{a} = 2 + i0$ e $\vec{b} = 0 + 2i$ determinam o vetor G34=vetor[G1,G33]. O efeito final pode ser vislumbrado e explorado pelos estudantes na figura abaixo.

Situação de formulação. Com explicamos na fase dialética anterior, os alunos devem se apropriar de um sistema notacional que deve proporcionar a homogeneização da comunicação entre o grupo. Ademais, como acentua Artigue (1984, p. 7) prevemos que “o aluno poderá justificar suas escolhas, todavia, a situação não exige”.

Desse modo, desde que $\int f(z)dz = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$, aonde $\gamma(t) = (2\cos(t), 2sen(t))$ indica $^{\gamma}$ uma circunferência que passa pelos pontos $\vec{a} = 2 + i0$ e $\vec{b} = 0 + 2i$, para os parâmetros correspondentes a $t = 0$ e $t = \dfrac{\pi}{2}$. Nesse caso, escrevemos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \left(4\cos(t) - 4\,\mathrm{sen}(t), 8\cos(t)\,\mathrm{sen}(t)\right) \cdot (-2sen(t), 2\cos(t))\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left(-8\cos(t)\,\mathrm{sen}(t) + 8\,\mathrm{sen}^2(t) + 16\cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t)\right)dt = 16\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t)dt + 8\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2(t)dt$$
$$-8\int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\mathrm{sen}(t)dt$$

Ora, o problema a ser enfrentado envolve a mobilização de antigos saberes. Com efeito, as integrais do tipo $\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t)dt, \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2(t)dt, \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\mathrm{sen}(t)dt$ constituem saberes que se inserem como pré-requisitos e se inserem num conjunto de técnicas de integração aprendidos no estudo do CUV.

Situação de validação. Diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário “provar o que foi afirmado na fase anterior” (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8).

Semelhante ao caso anterior, preservando o sistema notacional na variável complexa, teremos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_2^{2i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_2^{2i} = \frac{-8i}{3} - \frac{8}{3} = -2,67 - 2,67i$$

que pode ser visualizado como um vetor (na cor vermelha), na figura 9 (ao lado esquerdo). Desse modo, os alunos podem vislumbrar a interpretação geométrica e numérica do processo de integração e o professor-pesquisador poderá deparar a obtenção de dados para a testagem da (c).

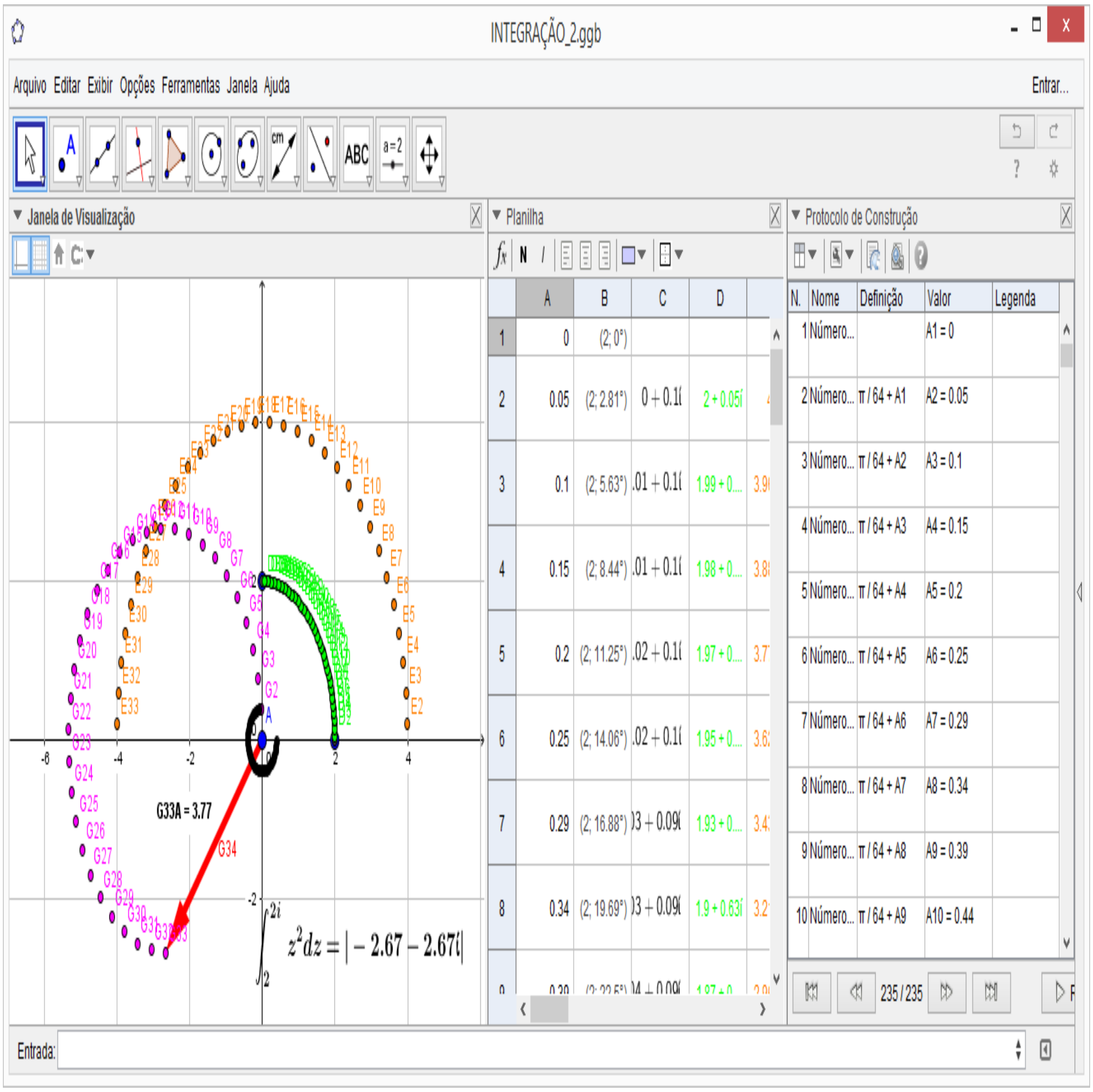

Figura 9. Visualização de integrais definidas na variável complexa com o software GeoGebra (elaboração do autor)

Situação de institucionalização. Nessa fase, os alunos deverão desenvolver um olhar de transição que envolve a modificação do *status* de instrumento matemático para objeto. Dessa forma, a atividade atual deve instigar a comparação dos resultados obtidos pelo modelo computacional com o modelo analítico característico da AC. O aspecto diferenciado, que defendemos em nossa abordagem, diz respeito ao amparo e a confirmação das ilações produzidas nas fases anteriores por intermédio da experimentação e comparação dos resultados matemáticos, do ponto de vista gráfico, numérico e analítico.

Para concluir a sessão atual, acentuamos que as variáveis didáticas (locais) que devem ser identificadas nas situações anteriores, dizem respeito aos seguintes aspectos: o entendimento de um processo construtivo da integral de funções na variável complexa, semelhante ao caso das funções da variável real; distinção e entendimento do resultado final do processo de integração na variável real (um número) do resultado final de uma função na variável complexa (um vetor); domínio e habilidade na mudança notacional de funções do tipo $f(z)=u(z)+i\cdot v(z)\Rightarrow f(\mathrm{x},\mathrm{y})=u(\mathrm{x},\mathrm{y})+i\cdot v(\mathrm{x},\mathrm{y})\Rightarrow f(z)=u(z)+i\cdot v(z)$; o *software GeoGebra* permite a exploração de um sintaxe particular e sua significação matemática; as estratégias partem inexoravelmente do ambiente de exploração computacional (situação de ação) e evoluem, tendo como escopo o emprego de modelos formais e, por fim, devem se confrontados com os elementos coligidos na fase de validação do modelo matemático.

Portanto, diante da problemática declarada ao decurso de nosso estudo, por intermédio de uma mediação afetada pela tecnologia, que busca enfatizar a visualização como elemento impulsionador de um tirocínio intuito e tácito, as eventuais dificuldades e entraves relacionados ao entendimento geométrico da noção de integração na variável complexa podem ser reduzidas ou, mesmo, evitadas.

7. Alguns elementos na validação de ED

No bojo das preocupações do professor-pesquisador com as respectivas produções do estudantes são previstas, numa ED, uma etapa de *validação interna* da sequência didática, bem como uma etapa de *validação externa*. A primeira envolve "uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes" (LABORDE, 1997, p. 105). Laborde (1997, p. 105) explica que a *validação externa* envolve uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou em grupo, bem como por meio de questionários. E, também, por meio da comparação de produções externas, envolvendo outros alunos não submetidos à mesma sequência estruturada de ensino, ou ainda dados provenientes de outros estilos de investigação.

Cabe observar que todas as produções dos estudantes devem possuir, segundo nossos pressupostos, um forte componente apoiado pela visualização e nas correlações entre os quadros analítico e numérico proporcionados pelo *software*, bem como pelo modelo matemático subjacente. (ver figuras 10 e 11). Logo abaixo trazemos alguns exemplos que possibilitam uma exploração dinâmica e não estática do processo de integração na variável complexa. Em todos os casos, o processo matemático final resulta na determinação ou produção de um vetor que pode ser alterado (arrastado) por intermédio de comandos elementares do software GeoGebra.

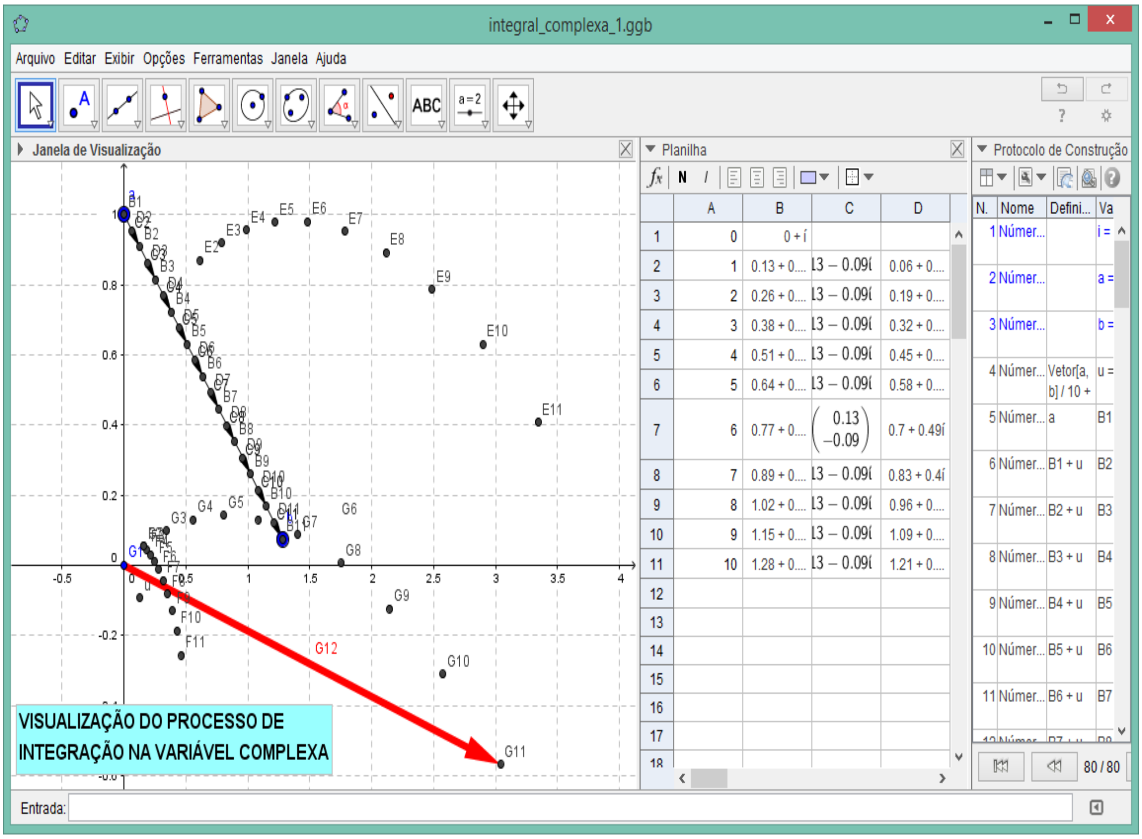

Figura 10. Visualização de integrais definidas na variável complexa com o software GeoGebra (elaboração do autor)

Na figura 11 trazemos ainda algumas construções elementares e que, segundo as potencialidades dos softwares, possibilitam um raciocínio comparativo e conceitual, quando lidamos com o processo de integração na variável real e, logo ao lado direito, divisamos o resultado de um processo de integração na variável complexa. O cenário de aprendizagem abaixo deverá convencer o leitor sobre as diferenças de ambos os processos e, sobretudo, o caráter de generalidade do segundo caso (ao lado direito).

Ademais, não podemos desconsiderar as advertências de Artigue (1995, p. 49), quando explica que "na maioria dos textos publicados concernentes às engenharias, a confrontação das análises, *a priori* e a posteriori, permite a aparição de distorções". E, pouco mais adiante, a autora aponta a ocorrência da formulação de hipóteses demasiadamente globais, "que colocam em jogo processos de aprendizagem demorados", fato que impossibilita uma sintonia pretendida com a amplitude da ED proposta.

Em nosso caso, quando nos debruçamos nas três hipóteses aqui formuladas, notamos que parte delas possuem uma caraterística de adequação, segundo preconiza Artigue (1995, p. 49º, entretanto, outras envolvem e exigem a proposição de outras investigações que ultrapassam os limites de nossa discussão, não obstante, com as características aqui discutidas, nosso projeto de engenharia deverá levar em consideração "os registros dos estudos de caso, nos quais, a validação é essencialmente interna" (HADDAD, 2012, p. 19). Por conseguinte, as etapas de intervenção podem levar em consideração um pequeno grupo de estudantes e um período temporal não prolongado de experimentação.

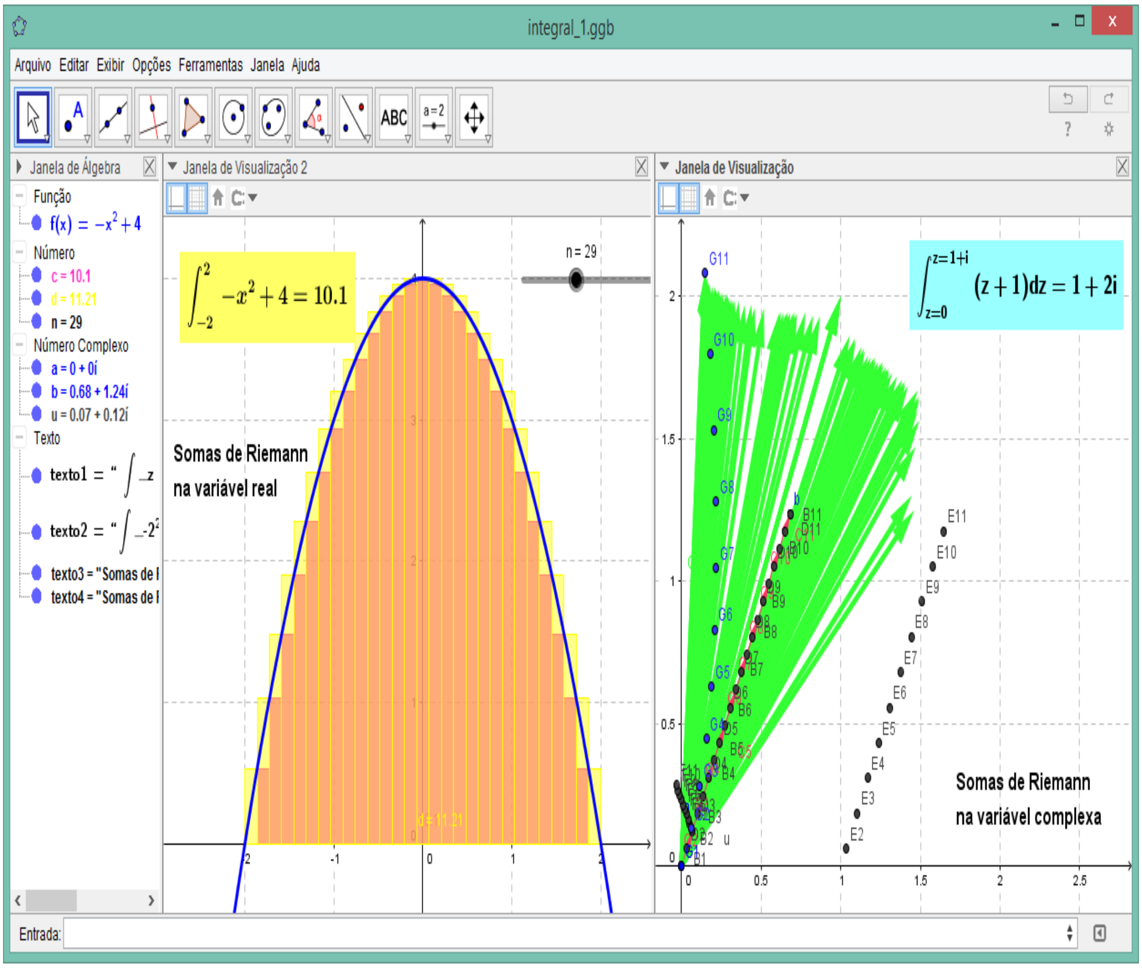

Figura 11. Descrição não estática do processo de integração com o software GeoGebra (elaboração do autor)

8. Considerações Finais

Nas seções precedentes apresentamos os elementos que entendemos ser os mais representativos para o ensino no âmbito da TCC, com o escopo de evitar determinados rituais indefectíveis no *locus* acadêmico que, em maior ou menor substância, tendem a fornecer aos estudantes teorias estruturantes, logicizadas e formais, desconsiderando possíveis vestígios históricos evolutivos de um pensamento provisório e intuitivo.

Em nosso caso, a presente proposta de ED, como o tema relacionado com o processo de integração de funções na variável complexa, buscou pontuar elementos de ordem metodológica que, por intermédio de uma simbologia cifrada do tipo abaixo

$$\int_a^b f(x)dx \overset{transição}{\Rightarrow} \int_\gamma f(z)dz \qquad \int_a^b f(x)dx \overset{transição}{\Rightarrow} \begin{cases} \iint_R f(x,y)\,dxdy \\ \iiint_R f(x,y,z)dxdydz \end{cases} \overset{transição}{\Rightarrow} \int_\gamma f(z)dz$$

encobrem fatores determinantes para o avanço ou estagnação dos conhecimentos apreendidos pelos alunos. Isso posto, manifestamos nossa preocupação com aspectos que, na transição da variável real para a variável complexa, podem atuar como entrave ao conhecimento (elementos de ruptura), bem outros que podem auxiliar/facilitar/impulsionar o entendimento do aprendiz (elementos de transição).

Ora, com arrimo do *software GeoGebra* podemos conduzir os estudantes, sobretudo na fase de ação da TSD, sobre o resultado do processo dinâmico e construtivo de integração de funções na variável complexa, na obtenção final de um vetor (ver figura 8, 9, 10 e 11). Ademais, por intermédio de uma mediação afetada/modificada pelo *software*, o professor terá a oportunidade, na fase de institucionalização, de agregar um *status* distinguido de um saber científico, incorporado ao patrimônio cognitivo dos aprendizes, possuidor de significados produzidos por intermédio da visualização, exploração, investigação e um entendimento qualitativo do cenário de aprendizagem que perseguimos apresentar.

Dessa forma, nossa perspectiva proporciona uma via alternativa para o ensino da noção de integração de funções na variável complexa ou outros assuntos em Análise, tendo em vista uma prática anacrônica acadêmica de ensino em nossas universidades, que costuma tornar hegemônico certos elementos que proporcionam maior comodidade apenas para o professor (ÁVILA, 2002), em detrimento do interesse do aprendiz.

Por fim, Artigue (2003, p. 124) acentua a trajetória acadêmica de contato dos alunos com a teoria da integração na academia. Em seu caso de análise particular, Artigue acentua os estudos que evoluem da integral de Riemann até o estudo da integral de Lebesgue e recomenda que "tudo isso exige reconstruções sucessivas das relações que os alunos mantêm com a noção de integral". Ademais, tendo em vista a posição indubitável para a exploração da tecnologia atual, assumimos posição semelhante, tendo em vista a necessidade de reconstruções sucessivas dos alunos no contexto da Transição Interna do Cálculo – TINC (ALVES, 2011) e da Transição Complexa do Cálculo – TCC (ALVES, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d; 2016e), relativamente ao contato prolongado com a noção com o processo matemático de integração.

9. Referências

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, Francisco. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis** (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará – UFC, 2011, 339f.

ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análise preliminares e a priori. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, 7(3), 148 – 168, 2014a.

ALVES, Francisco. R. V. Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics – CT^2M . **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, 5(2), 1 – 9, 2014b.

ALVES, Francisco. R. V. Aplicações no Ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, 3(2), 2014c.

ALVES, Francisco. R. V. Visualizing the behavior of infinite series and complex power series with the GeoGebra. **GeoGebra International Journal of Romania**. 4(1), 1 – 10, 2014d.

ALVES, Francisco. R. V. Visualização de Teoremas em Análise Complexa: exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo TCC. **Revista Sinergia - IFSP**, 16(1), 65 – 76, 2015.

ALVES, Francisco. R. V. Transição Complexa do Cálculo – TCC: engenharia didática para as noções de sequências, séries e séries de potências. **Educação Matemática em Revista – RS**. v. 17, nº 17, 83 – 97. 2016a.

ALVES, Francisco. R. V. Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**. v. 7, nº 21, 131 – 150, 2016b

ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática: implicações para a pesquisa no âmbito do ensino de Análise Complexa. **Revista Ciência e Natura**, v. 38, nº 2, 694 – 715. 2016c.

ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática no contexto de Transição Complexa do Cálculo: aspectos epistemológicos e metodológicos sobre a noção de integração de funções na variável complexa. **Revista THEMA**, v. 13, nº 1, 47 – 64, 2016d.

ALVES, Francisco. R. V. GeoGebra e a Transição Complexa do Cálculo: o caso da regra de L`Hospital, **Revista Indagatio Didáctica**, Portugal, v. 6, nº 2, 95 – 118, 2016e.

ALVES, Francisco. R. V; Borges Neto, H. & Alves Dias, M. Implicações e aplicações da Teoria das Representações Semióticas no ensino do Cálculo. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, 5(1), 54 – 84, 2012.

ALVES, Francisco. R. V. & Lopes, Marcos. A. Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software Geogebra. **Revista do GeoGebra Internacional de São Paulo**. 2(1), 6 – 21, 2013.

ARTIGUE, Michelle. Ingeniería didáctica. Gomez, Pedro (org.) **Ingeniería didáctica en Educación Matemática**, Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 33 – 61, 1995.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactiques. Brun, J. (org.). **Didactiques de Mathématiques**, 243 – 264. Lagrange J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France. 1996.

ARTIGUE, M. Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário? **Boletín de La Asociatíon Venezolana**, vol. X, nº 2, 117-134, 2003.

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo e da Análise. **Matemática Universitária**, 33(1), 83-94, 2002.

BOTTAZZINI, U. **The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer-Verlag, 1986.

BOTTAZZINI, U. & GRAY, Jeremy. **Hidden Harmony - Geometric fantasies: the rise of the Complex Functions Theory**. New York: Springer, 2013.

BOYER, Carl. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**, New York: Dover Publications, 1949.

BOURBAKI, N. **Éléments d´Histoire des Mathematiques**. Paris: Masson, 1984.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation de phénomènes d´enseignement des mathématiques**. (thése de doctorat). Bordeaux : Université de Bordeaux I. 1986. 905f.

BROUSSEAU, G. **Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Paris: La Pensée Sauvage, 5 – 66, 1994.

BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître**. Bulletin de l'A.M.Q. Montréal**, 14-24, 1988.

BROUSSEAU, G. Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. **Recherche en Didactiques des Mathématiques**. 7(2), 33 – 115, 1986.

BROUSSEAU, Guy. L'émergence d'une science de la didactique des mathématiques. In: **Repère IREM**, 55, 19-34, 2004.

BRUM, Wanderley, P. & Schuhmacher, E. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matematica**, 6(2), 60 – 84, 2013.

DEBNATH, L. A brief history of the most remarkable numbers e, i and γ in mathematical sciences with applications. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. 46(6), March, 853 – 878, 2015.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) **Ingenieria Didactica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1 – 7, 1995a.

DOUADY, Régine. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. Gomez, P. (org.) **Ingenieria Didactica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 61 – 97, 1995b.

DOUADY, Régine. Géométrie, graphiques, fonctions au collège**. Revista Eletrónica de investigación en educación e ciencias**. nº 1, 1-7, 2008.

FLANIGAN, F. J. **Complex Variables: harmonic and analytic functions**. California: San Diego State University, 1972.

GONG, S. **Concise Complex Analysis**. New Jersey: World Scientific, 2001.

GRAY, Jeremy. **The Real and the Complex: a History of Analysis in the 19th century**. New York: Springer, 2015.

HADDAD, Sassi. **L´enseignement de L´intégrale en classe terminale de l´enseignement tunisien**. (these de doctorat). Paris: Université Paris VII. 2012.

HAIRER, E. & WANNER, G. **Analysis by Its History**. New York: Springer, 2008.

MARINHO, Monteiro, M. R. & ALVES, Francisco, R. O estuda da série de Laurent com recurso ao GeoGebra: contributo da Engenharia Didática. **Revista Indagatio Didáctica**, Portugal, v. 8, nº 5, 165 – 196, 2016.

MEDVEDEV, Fyodor, A. **Scenes from the History of real functions**. Birkhäuser Verlag: Berlim, 1991.

NEEDHAM, T. **Visual Complex Analysis**. Oxford: Oxford University Press, 2000.

RUDIN, Walter. **Real and Complex Analysis**. New York: McGrall-Hill Book Company, 1986.

SCHUBRING, Gert. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition:** Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany. New York: Springer, 2005.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

SCHWERDTFEGER, Hans. **Geometry of Complex Numbers**. New York: Dover Publications, 1979.

SHOKRANIAN, S. **Uma introdução à Variável Complexa**, São Paulo: Editora Moderna, 2011.

WERGERT, Elias. **Visual Complex Functions: an introduction with the phase portrait**. New York: Birkhäuser, 2012