ENGENHARIA DIDÁTICA DE 2ª GERAÇÃO COM O TEMA: h(x)-POLINÔMIOS DE JACOBSTHAL

DIDACTICAL ENGINEERING OF THE SECOND GENERATION WITH THE TEMME: h(x)-JACOBSTHAL POLYNOMIALS

Francisco Regis Regis Vieira Alves*[1], Paula Maria Paula Maria Catarino[2]

[1]*IFCE - Fortaleza - CE - Brasil*
[2]*Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - Vila Real - Portugal*

Resumo: O presente trabalho apresenta as duas fases iniciais (análises preliminares e a análise *a priori*), balizado por uma perspectiva de Engenharia Didática de 2ª geração – ED2, com o tema envolvendo o estudo de propriedades da Sequência dos h(x)-Polinômios de Jacobsthal – SPJ. O tema mencionado possui derivação e generalização imediata a partir da emblemática sequência estudada por E. Jacobhsthal (1882 – 1965) e, hodiernamente, ainda preserva intenso vigor investigativo, relevado em um extenso conjunto de artigos científicos discutidos ao decurso do estudo. Desse modo, a investigação de caráter eminentemente teórico, apresenta roteiros de ensino e transposição didática, visando suscitar orientações e um viés de exploração no ensino acadêmico para determinadas propriedades da SPJ, rotineiramente não pormenorizadas nos trabalhos científicos em Matemática Pura e Aplicada. Por fim, com origem nos pressupostos de uma ED2, finaliza com a indicação e alguns conteúdos para o aperfeiçoamento no ensino acadêmico, no âmbito do contexto histórico, matemático e epistemológico.
Palavras-chave: Engenharia Didática de 2ª geração, Sequência de Jacobsthal, Ensino, História.

Abstract: The present work presents the two initial phases (preliminary analysis and a priori analysis), based on a 2nd generation Didactic Engineering perspective - ED2, with the theme involving the study of the properties of h(x)-Polinomials of Jacosbthal - SPJ. The subject mentioned has an immediate derivation and generalization from the emblematic sequence studied by E. Jacobhsthal (1882 - 1965) and, presently, still preserves intense investigative vigor, highlighted in an extensive set of scientific articles discussed during the course of the study. In this way, the research of an eminently theoretical nature, presents didactic teaching and didactical transposition, aiming at provoking orientations and an exploration bias in the academic teaching of certain properties of the SPJ, routinely not detailed in the scientific works in Pure and Applied Mathematics. Finally, based on the assumptions of an ED2, it ends with the indication and some contents for the improvement in academic teaching, within the context of the historical, mathematical and epistemological context.
Keywords: Didactical Engineering of second generation, Jacobsthal sequence, Teaching, History.

1. Introdução

Reconhecidamente, algumas práticas e os rituais indefectíveis de ensino, no *locus* acadêmico, a despeito de duas décadas da constatação e do questionamento dos métodos

* fregis@ifce.edu.br

empregados, tendo em vista a melhoria do ensino e da aprendizagem, evidenciam um status inercial e de caráter pouco evolutivo, sobretudo, quando nos atemos ao caráter diferenciado do emprego da tecnologia em sal de aula, que proporciona/catalisa itinerários diferenciados para a exploração e para a abordagem de conteúdos e/ou assuntos específicos.

De fato, apesar de que, podemos constatar um acúmulo, não necessariamente sistemático e ainda programático, de uma profusão de investigações (em Educação Matemática); algumas com o foco na formação do profissional (inicial e continuada) e nas concepções hegemônicas, recorrentemente veiculadas em sala de aula. Ainda determinadas distorções, obsolescências, equívocos e algumas incongruências precisam de maior atenção, vigilância e de superação. Nossa perspectiva se alinha ao prisma da constatação da tímida repercussão ou impacto no aperfeiçoamento efetivo e na qualidade pretendida do ensino e da aprendizagem em Matemática, com âmbito escolar e acadêmico (ALVES & ALVES DIAS, 2017).

Dessa forma, de modo particular, em nossos trabalhos (ALVES, 2016a; 2016b; ALVES & CATARINO, 2016) desenvolvidos com o interesse de discussão histórica e epistemológica, temos questionado a proposição de expedientes, no contexto de ensino de Matemática por meio de sua História que envolvem uma ênfase de elementos que não proporcionam um entendimento sobre o vigor histórico indene da Matemática, concernentemente aos seus elementos de ordem epistemológico-evolutiva. Ademais, apesar de que propiciam um cenário do estádio de nascedouro de teorias, conceitos ou objetos matemáticos, pecam no ensejo de veicular uma percepção constantemente atualizada e contígua da pesquisa sobre determinados assuntos.

Por outro lado, tendo em vista que alguns dos assuntos matemáticos abordados em nossos trabalhos, dizem respeito, em maior ou em menor substancia, da discussão apenas em artigos científicos de Matemática Pura ou Aplicada, propugnamos um viés de sua estruturação, divulgação e de um planejamento sistematizado, por intermédio da descrição de situações estruturadas de ensino, com ênfase em seu caráter histórico, matemático evolutivo e epistemológico (ALVES, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d; ALVES & CARARINO, 2017a; 2017b).

Isso posto, nas seções subsequentes, desenvolveremos e descreveremos as duas primeiras fases clássicas previstas por uma Engenharia Didática – ED (análises preliminares e análise *a priori*, com a concepção de situações de ensino). Todavia, tendo em vista o estádio evolutivo das vertentes da ED, internacionalmente conhecidas como Engenharia Didática Clássica ou de 1ª geração – ED1 e a Engenharia Didática de 2ª geração – ED2, restringir-nos-emos aos elementos propugnados e assumidos pela segunda vertente (ED2), tendo em vista que a mesma direciona maior atenção ao papel e a função do professor, enquanto agente construtor de situações para o ensino, da eficacidade dos modelos de sua mediação (transposição didática) e das transformações e alterações necessárias aos conhecimentos matemáticos que, devem permitir, inexoravelmente, o alcance e o entendimento por parte dos aprendizes. Na seção subsequente, delinearemos alguns aspectos históricos, matemáticos e epistemológicos capazes de explicar o progresso matemático evolutivo de algumas sequências numéricas de segunda ordem.

2. Alguns aspectos históricos evolutivos da Sequência de Jacobsthal – SJ

Siegmund-Schultze (2009, p. 327) Ernst Jacobsthal foi um teórico dos números que tinha sido expulso de Berlim e se tornou um refugiado à Noruega e Suécia em 1939 e 1943. Ele foi aluno de Ferdinand G. Frobenius (1849 – 1917). Como no caso da sequência de Fibonacci, sequência Lucas, sequência Pell, sequência de Padovan, sequência de Perrrin, Sequência de Mersenne, sequência de Narayana, encontramos uma herança enorme e variada de modelos, propriedades, teoremas e Implicações recentes para outros ramos especiais em Matemática, derivado do trabalho de Jacobsthal e, em particular, o processo de generalização da sequência Jacobsthal (ver figura 1 abaixo).

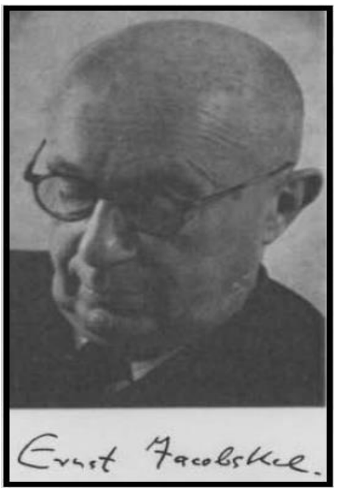

Figura 1. Ernst Erich Jacobsthal (1882 – 1965)

Sem dúvida, a seqüência de Fibonacci preserva um caráter de interesse e, ao mesmo tempo, de mistério, em torno das propriedades numéricas de uma sequência que se origina a partir de um problema relacionado com a reprodução infinita de pares de coelhos (Alves, 2017). Por outro lado, em vários livros de História da Matemática no Brasil e em outros países (Eves, 1969, Gullberg, 1997; Herz 1998; Huntley, 1970), nós apreciamos um interesse ingênuo, que geralmente enfatiza propriedades eminentemente básicas, pitorescas, contistas e triviais relacionadas a esta sequência. Este tipo de abordagem (do tipo curiosidade histórica) pode fornecer uma compreensão estreita e incongruente da sequência de Fibonacci, principalmente sobre o estágio evolutivo atual da mesma (Alves, 2017A, 2017B, 2016A; 2016b; 2016c; 2017).

Por outro lado, a formulação de outras sequências numéricas recursivas de segunda ordem é uma consequência da evolução e a mobilização de vários matemáticos e especialistas em torno particularmente derivados e modelos generalizadas. Por exemplo, a sequência habitual Jacobsthal $\{J_n\}, n \in IN$ é definida por e representado com a seguinte recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$, com as condições iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$. Consequentemente, podemos descrever os seguintes conjuntos de números $\{J_n\}:\{0,1,1,3,5,11,21,43,85,171,\ldots\}$. Na figura abaixo, vemos um fragmento de um livro de E. E. Jacobsthal (1882 - 1965). Notamos o uso de representações de matriz e a descrição de uma segunda ordem de sequência recorrente homogéneos que, para o caso x = 1 podemos determinar a seqüência de Fibonacci e, quando x

= 2, teremos a sequência numérica, de segunda ordem, recorrente de Jacobsthal que buscaremos discutir minuciosamente ao decurso do trabalho.

werte x eintreten. Um diese zu charakterisieren, bemerke ich, daß die Substitution (5) sich auch in der Form

(6) $$z_n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n z_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

schreiben läßt. Diese Gleichung sieht nach Ausrechnung der Potenz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ so aus:

(7) $$z_n = \begin{pmatrix} f_n & x f_{n-1} \\ f_{n-1} & x f_{n-2} \end{pmatrix} z_0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hierin bedeutet $f_n = f_n(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von x, die dem Rekursionsgesetze

(8) $$f_{n+1} = f_n + x f_{n-1}, \quad f_{-1} = 0, \; f_0 = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt. Bekanntlich sind die Zahlen $f_n(1)$ die sogenannten Fibonaccischen Zahlen. Man nennt daher die Polynome $f_n(x)$ die Fibonaccischen Polynome.

Figura 2. Jacobsthal (1919 - 1920) descreve os primeiros valores numéricos para a seqüência, que produz a seqüência Jacobsthal (para x = 2).

De forma semelhante ao caso da seqüência de Fibonacci $\{f_{-n}\}_{n\in IN}$, seqüência Lucas $\{L_{-n}\}_{n\in IN}$ ou Pell $\{P_{-n}\}_{n\in IN}$ que é indicada por (Alves, 2017a; 2017b), podemos observar o seguinte processo de descrição e extensão para os índices inteiros correspondentes, como se segue na figura 3. De modo semelhante ao caso das outras sequências numéricas mencionadas, um processo natural de extensão ao campo de índices inteiros que pode ser perspectivado abaixo, a partir da descrição das sequências para índices à esquerda do número natural n=0.

J_{-n}	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$	$-\frac{21}{64}$	$\frac{43}{128}$	$-\frac{85}{256}$	$\frac{171}{512}$	$-\frac{341}{1024}$
…											
j_{-n}	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{31}{32}$	$\frac{65}{64}$	$-\frac{127}{128}$	$\frac{257}{256}$	$-\frac{511}{512}$	$\frac{1025}{1024}$

Figura 3. Anita (2016) descreve os primeiros valores numéricos correspondentes

A partir de um trabalho de Horadam (1978), podemos considerar que $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ e, dessa forma, teremos:

$$\left(\frac{J_n}{J_{n-1}}\right) = 1 + 2\frac{J_{n-2}}{J_{n-1}} = 1 + 2\frac{1}{J_{n-1}/J_{n-2}}.$$

A partir da divisão conveniente do termo acima, podemos tomar ainda da forma $t_n = \frac{J_n}{J_{n-1}}$. Por conseguinte, teremos a expressão:

$$t_n = \frac{J_n}{J_{n-1}} = 1 + 2\frac{1}{\left(J_{n-1}/J_{n-2}\right)} = 1 + 2\frac{1}{t_{n-1}}$$

Dando prosseguimento ao raciocínio, assumiremos que existe

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{J_n}{J_{n-1}} = J$$

Sendo assim, ao tomarmos o limite, de ambos os lados, na expressão anterior, deveremos encontrar:

$$J = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+2\frac{1}{t_{n-1}}\right) = 1+2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{t_{n-1}}\right) = 1+2\frac{1}{J} \therefore J^2 - J - 2 = 0$$

A partir da equação anterior, determinaremos, facilmente, as seguintes raízes: $\alpha = 2, \beta = -1$. Agora, iremos empregar o termo geral, previsto pela Teoria das Equações homogêneas recorrentes lineares (PAULE & KAURERS, 2011) que permite escrever $J_n = a_1 \cdot 2^n + a_2 \cdot (-1)^n$ e, levando em consideração os valores iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$. Portanto, determinaremos o seguinte sistema com duas equações:

$$\begin{cases} J_0 = a_1 \cdot 2^0 + a_2 \cdot (-1)^0 = 0 \\ J_1 = a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot (-1)^1 = 1 \end{cases}$$

Facilmente, resolvendo acima e determinando as duas incógnitas, vemos ainda que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_1 - a_2 = 1 \end{cases} \therefore a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{1}{3}$$

Portanto, teremos o seguinte termo geral, de ordem 'n', e que permite determinar qualquer elemento presente, de modo explícito, na sequência recorrente de Jacobsthal, que indicaremos por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \left(\forall n \in IN\right).$$

Ora, antes de prosseguirmos em nossa constatação inicial dos traços (epistemológicos) evolutivos da sequência que estudamos, vejamos o seguinte lema.

Lema 1: Para todo inteiro 'n' positivo, podemos determinar que $J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_n$

Demonstração: Desde que o termo geral, para índices inteiros positivos foi determinado anteriormente por $J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$

Agora, vejamos que: $J_{-n-1} = 1 \cdot \frac{2^{-n-1} - (-1)^{-n-1}}{3} =$

$$= (-1)^{n+2}(-1)^{n+2}\frac{(2^{-n-1} - (-1)^{-n-1})}{3} = (-1)^{n+2}\frac{(-1)^{n+1}((-1)^{-n-1} - 2^{-n-1})}{3} = \frac{(-1)^{n+2}}{1}\frac{(1-(-1)^{n+1}2^{-n-1})}{3}$$

$$= \frac{(-1)^{n+2}}{1} \times \frac{(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}})}{3} = \left(\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{(2^{n+1} - (-1)^{n+1})}{3} = \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot J_{n+1}.$$

Assim, vimos que ocorre a seguinte igualdade $J_{-(n+1)} = J_{-n-1} = \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}} J_{n+1}, \forall n \in IN.$

Com origem no modelo descritivo do termo geral anterior $J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$

Podemos constatar, ainda, um interesse sistemático, por parte de vários especialistas, no sentido de generalizar as propriedades e elementos invariantes distinguidos da sequência de Jacobsthal. Desse modo, apresentaremos uma pequena lista de definições matemáticas.

Definição 1: Os números da forma $\{J_n^s\}, n \in IN$, definidos pela seguinte forma geral

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \geq 0, s \geq 2$$

determinam os números da s-Sequência de Jacobsthal (ANATASSOV, 2011).

Definição 2: Os números da forma $\{J_n^{s,t}\}, n \in IN$, definidos pela seguinte forma geral

$$J_n^{s,t} = \frac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \geq 0, t, s \geq 2, s \neq -t$$

determinam os números da (s,t)-Sequência de Jacobsthal (ANATASSOV, 2011).

As duas definições matemáticas acima presentam o interesse e o desenvolvimento constante de pesquisa, com o intendo de generalizar as propriedades derivadas da sequência original. Por exemplo, podemos constatar que obtemos

$$s = 2 \therefore J_n = J_n^s = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

E, alguns casos particulares iniciais podem ser constatados, da seguinte forma $J_0^s = 0$,

$$J_1^s = 1,\ J_2^s = s-1,\ J_3^s = \frac{s^3+1}{s+1} = \frac{(s+1)(s^2-s+1)}{s+1} = (s^2-s+1),\ J_4^s = \frac{s^4-1}{s+1} = s^3 - s^2 + s - 1$$
$$J_5^s = \frac{s^5+1}{s+1} = s^4 - s^3 + s^2 - s + 1.$$

Acima apreciamos os valores iniciais para a s-Sequência de Jacobsthal. Por outro lado, para os valores inicias da (s,t)-Sequência, que define os números do conjunto $\{J_n^{s,t}\}, n \in IN$ podemos observar:

$$J_0^{s,t} = 0, J_1^{s,t} = \frac{s^1+t}{s+t} = 1, J_2^{s,t} = \frac{s^2-t^2}{s+t} = s-t \quad , \quad J_3^{s,t} = \frac{s^3+t^3}{s+t} = \frac{(s+t)(s^2-st+t^2)}{s+t} = s^2 - st + t^2$$

$$J_4^{s,t} = \frac{s^4-t^4}{s+t} = \frac{(s+t)(s^3-s^2t+st^2-t^3)}{s+t} = s^3 - s^2t + st^2 - t^3$$

$$J_5^{s,t} = \frac{s^5+t^5}{s+t} = \frac{(s+t)(s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4)}{s+t} = s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4,\ J_6^{s,t} = \frac{s^6-t^6}{s+t} =$$

$$= \frac{(s+t)\cdot(s^5-s^4t+s^3t^2-s^2t^3+st^4-t^5)}{(s+t)} = s^5 - s^4t + s^3t^2 - s^2t^3 + st^4 - t^5.$$

Anatossov (2011, p. 38) define, ainda, o número da forma $J_n^{t,-t} = \lim_{s \to -t} \frac{s^n - (-t)^n}{s+t}$

Nesse caso, emprega alguns procedimentos do Cálculo Diferencial, como a regra de L´Hospital, a fim de determinar a seguinte forma fechada para os números da forma $J_n^{t,-t}$.

Consequentemente, Anatassov (2011) determinou que $J_n^{s,-s} = n \cdot s^{n-1}, n \geq 1$.

$$J_n^{t,-t} = \lim_{s \to -t} \frac{\frac{d}{ds}\left(s^n - (-t)^n\right)}{\frac{d}{ds}(s+t)} = \lim_{s \to -t} \frac{\frac{d}{ds}\left(s^n\right) - \frac{d}{ds}\left((-t)^n\right)}{\frac{d}{ds}(s)+0} = \lim_{s \to -t} \frac{n \cdot s^{n-1} - 0}{1} = n \cdot (-t)^{n-1}$$

Cabe comentar e apresentar ainda a seguinte fórmula de recorrência indicada e formulada por Silva, Andrade & Silva (2015, p. 1), de acordo com a seguinte definição abaixo.

Definição 3: Os números da forma $\left\{J_n{}^s\right\}, n \in IN$, definidos pela seguinte regra de recorrência $J_n{}^s = (s-1) \cdot J_{n-1}{}^s + s \cdot J_{n-2}{}^s, \forall n \geq 2$ com as condições iniciais $J_0{}^s = 0, J_1{}^s = 1$ (SILVA, ANDRADE & SILVA , 2015).

Antes de deflagrarmos a seção subsequente, vejamos uma outra espécie ou forma de derivação e de generalização da sequência de Jacobsthal. Para tanto, apreciamos as seguintes definições matemáticas formais.

Definição 4: Os números da forma $\left\{J_n(x)\right\}, n \in IN$, definidos pela seguinte regra de recorrência $J_{n+1}(x) = J_n(x) + 2x \cdot J_{n-1}(x), \mathrm{n} > 0$ com as condições iniciais $J_0(x) = 0, J_1(x) = 1$ (HORADAM, 1997).

Mais uma vez, podemos determinar alguns dos seus valores (polinômios) iniciais: $n = 1 \therefore J_2(x) = J_1(x) + 2x \cdot J_0(x) = 1$, $n = 2 \therefore J_3(x) = J_2(x) + 2x \cdot J_1(x) = 1 + 2x$, $n = 3 \therefore$ $n = 3 \therefore J_4(x) = J_3(x) + 2x \cdot J_2(x) = 1 + 2x + 2x \cdot 1 = 1 + 4x$, $n = 4 \therefore J_5(x) = J_4(x) + 2x \cdot J_3(x) =$ $= 1 + 4x + 2x \cdot (1 + 2x) = 1 + 6x + 4x^2$.

Na figura abaixo, divisamos uma lista preliminar descrita nos trabalhos de Horadam (1996, 1997) sobre a Sequência Polinomial de Jacobsthal – SPJ (definida acima). Cabe observar o laborioso cálculo operacional, na medida em que lidamos com os índices ‘n’ cada vez maiores.

$J_0(x) = 0$	$J_6(x) = 1 + 8x + 12x^2$
$J_1(x) = 1$	$J_7(x) = 1 + 10x + 24x^2 + 8x^3$
$J_2(x) = 1$	$J_8(x) = 1 + 12x + 40x^2 + 32x^3$
$J_3(x) = 1 + 2x$	$J_9(x) = 1 + 14x + 60x^2 + 80x^3 + 16x^4$
$J_4(x) = 1 + 4x$	$J_{10}(x) = 1 + 16x + 84x^2 + 160x^3 + 80x^4$
$J_5(x) = 1 + 6x + 4x^2$	

Figure 4. Horadam (1997) desenvolveu uma listagem dos primeiros elementos presentes na sequência polinomial de Jacobsthal.

Mas, a fim de remediar o grande custo operacional que antevemos da figura acima, vamos adotar a seguinte representação matricial, na variável ‘x’.

$$C_{h(x)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

A matriz acima é definida no trabalho recente de Catarino & Morgado (2015) e que, introduzem ainda uma outra generalização da definição 4, que passaremos a apresentar agora.

Definição 5: As funções polinomiais da forma $\{J_n(x)\}, n \in IN$, definidos pela seguinte regra de recorrência $J_{h,n+1}(x) = J_{h,n}(x) + h(x) \cdot J_{h,n-1}(x), \mathrm{n} > 0$ com as condições iniciais $J_{h,0}(x) = 0, J_{h,1}(x) = 1$, aonde $h(x)$ é um polinômio arbitrário qualquer, determina a h(x)-Sequência Polinomial de Jacobsthal – h(x)-SPJ. (CATARINO & MORGADO, 2015).

De imediato, no caso particular para $h(x) = 2x$, determinamos

$$C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Desse modo, determinaremos as seguintes potências:

$$C^2(x) = \begin{pmatrix} 2x \cdot 1 & 1 \\ 2x \cdot 1 & 2x+1 \end{pmatrix}$$

$$C^3(x) = \begin{pmatrix} 2x \cdot 1 & 2x+1 \\ 2x(2\mathrm{x}+1) & 4x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot J_2(x) & J_3(x) \\ 2x \cdot J_3(x) & J_4(x) \end{pmatrix}, \quad C^4(x) = \begin{pmatrix} 2x(1+2x) & 4\mathrm{x}+1 \\ 2x(1+4\mathrm{x}) & 4x^2+6x+1 \end{pmatrix}$$

$$C^5(x) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{x}(4\mathrm{x}+1) & 4x^2+6x+1 \\ 2x(4x^2+6x+1) & 12x^2+8x+1 \end{pmatrix}, C^6(x) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{x}(4\mathrm{x}+1) & 4x^2+6x+1 \\ 2x(4x^2+6x+1) & 12x^2+8x+1 \end{pmatrix}$$

$$, C^7(x) = \begin{pmatrix} 2x(4x^2+6x+1) & 12x^2+8x+1 \\ 2x(12x^2+8x+1) & 8x^3+24x^2+10x+1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, da relação de recorrência da definição 5, poderemos determinar que $n=1 \therefore J_{h,2}(x) = J_{h,1}(x) + h(x) \cdot J_{h,0}(x) = 1$, $n = 2 \therefore J_{h,3}(x) = J_{h,2}(x) + h(x) \cdot J_{h,1}(x) = 1 + \mathrm{h}(\mathrm{x})$, $n = 3 \therefore J_{h,4}(x) = J_{h,3}(x) + h(x) \cdot J_{h,2}(x) = 2h(x) + 1$, $n = 4 \therefore J_{h,5}(x) = J_{h,4}(x) + h(x) \cdot J_{h,3}(x) = 2h(x) + 1 + h(x)(1 + \mathrm{h}(\mathrm{x})) = \mathrm{h}(\mathrm{x})^2 + 3h(x) + 1$. E, assim, sucessivamente, para os valores subsequentes dos inteiros $n \geq 0$.

Nosso último exemplo recentemente introduzido na literatura foi extraído do trabalho de Falcon (2015). Com efeito, para um número real positivo qualquer $k \in IR$, apresentamos uma última definição formal.

Definição 6: Definiremos o k-números de Jacobsthal, como os elementos do conjunto $\{J_{k,n}\}, n \in IN$ e ainda determinados pela seguinte relação de recorrência $J_{k,n+1} = J_{k,n} + k \cdot J_{k,n-1}, n \geq 1$. Os valores inicias assumidos por Falcon (2015) são $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$.

Na figura abaixo, divisamos alguns dos valores iniciais determinados pela relação de recorrência definida por Falcon (2015). Por outro lado, quando definimos a seguinte matriz 2x2 $C_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$ poderemos determinar ainda os seguintes casos (ver figura 5):

$$C_k{}^2 = \begin{pmatrix} k \cdot 1 & 1 \\ k \cdot 1 & k+1 \end{pmatrix}_{2x2}, \quad C_k{}^3 = \begin{pmatrix} k \cdot 1 & k+1 \\ k \cdot (k+1) & 2k+1 \end{pmatrix}_{2x2}, \quad C_k{}^4 = \begin{pmatrix} k \cdot (k+1) & 2k+1 \\ k \cdot (2k+1) & k^2+3k+1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$C_k{}^5 = \begin{pmatrix} k \cdot (2k+1) & k^2+3k+1 \\ k \cdot (k^2+3k+1) & k^2+4k+1 \end{pmatrix}_{2x2}, \quad C_k{}^6 = \begin{pmatrix} k \cdot (k^2+3k+1) & 3k^2+4k+1 \\ k \cdot (3k^2+4k+1) & k^3+6k^2+5k+1 \end{pmatrix}_{2x2},$$

$$C_k^{\,7} = \begin{pmatrix} k\cdot(3k^2+4k+1) & k^3+6k^2+5k+1 \\ k\cdot(k^3+6k^2+5k+1) & 4k^3+10k^2+6k+1 \end{pmatrix}_{2x2}.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} J_{k,1}=1 & J_{k,5}=1+3k+k^2 \\ J_{k,2}=1 & J_{k,6}=1+4k+3k^2 \\ J_{k,3}=1+k & J_{k,7}=1+5k+6k^2+k^3 \\ J_{k,4}=1+2k & \end{array}}$$

Figure 5. Falcon (2015) apresenta uma listagem inicial dos elementos definidores dos k-números de Jacobsthal

Nos parágrafos predecessores, abordamos, de forma sucinta, um conjunto de seis definições matemática que confirmam um processo matemático e epistemológico evolutivo, intimamente determinado a condicionado pelo modelo estudado e discutido inicialmente por Erns Jacobsthal. Com o escopo de vislumbrarmos o viés histórico e epistemológico objetivado aqui, trazemos ao leitor na tabela I abaixo, informações simplificadas e visceralmente condicionadas pelo processo de generalização ininterrupto e as modificações progressivas da definição original, introduzida e estudada sistematicamente em 1919 – 1920 por Jacobsthal.

Tabela I: Descrição epistemológico-evolutiva das definições derivadas da Sequência de Jacobsthal.

DEFINIÇÃO MATEMÁTICA	DESCRIÇÃO
$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \ge 2$ $J_0 = 0, J_1 = 1$	Descrição da sequência numérica recorrente de Jacobsthal em 1919 – 1920.
$J_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ (*) termo geral da sequência.	Descrição do termo geral de ordem 'n' para a sequência de Jacobsthal.
$J_n^s = \dfrac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \ge 0, s \ge 2$. (ANATASSOV, 2011)	Descrição do termo geral de ordem 'n' para a s-sequência de Jacobstha que generaliza o termo geral (*).
$J_n^{s,t} = \dfrac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \ge 0, t, s \ge 2, s \ne -t$ (ANATASSOV, 2011)	Descrição do termo geral de ordem 'n' para a (s,t)-sequência de Jacobsthal.
$J_{n+1}(x) = J_n(x) + 2x \cdot J_{n-1}(x), \mathrm{n} > 0$ (HORADAM, 1996; 1997)	Descrição das funções polinomiais de Jacobsthal, na variável real 'x'.
$J_{h,n+1}(x) = J_{h,n}(x) + h(x) \cdot J_{h,n-1}(x), \mathrm{n} > 0$ (CATARINO & MORGADO, 2015)	Definição da h(x)-Sequência Polinomial de Jacobsthal, aonde h(x) função polinomial arbitrária.
$J_{k,n+1} = k \cdot J_{k,n} + 2 \cdot J_{k,n-1}, n \ge 1,\ J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ (JHALA; SISODIYA; RATHORE, 2013)	k-sequência de Jacobsthal, envolvendo um parâmetro.
$J_n^{\ s} = (s-1) \cdot J_{n-1}^{\ s} + s \cdot J_{n-2}^{\ s}, n \ge 2$ $J_0^{\ s} = 0, J_1^{\ s} = 1$ (SILVA, ANDRADE & SILVA , 2015).	Descrição de recorrência para os s-números de Jacosbthal.
$J_{k,n+1} = J_{k,n} + k \cdot J_{k,n-1}, n \ge 1$. (FALCON, 2015)	Descrição dos k-números de Jacobshtal.

Fonte: Elaboração dos autores.

Desse modo, assinalaremos alguns dos elementos que objetivam delinear os interesses sistemáticos subsequentes em nossa investigação. De fato, podemos depreender que:

(i) os textos (e/ou artigos) consultados, que se constituem de artigos científicos de Matemática Pura e Aplicada, são desprovidos de uma ação de mediação intencional, que visa proporcionar conteúdos de formação para professores de Matemática que atuam no *locus* acadêmico;

(ii) os textos (e/ou artigos) consultados, que se constituem de artigos científicos de Matemática Pura e Aplicada, assumem um estilo sincopado e cifrado, que proporciona encobrir uma série de propriedades e simplificações que podem auxiliam o exame e o entendimento de vários argumentos presentes no texto, intimamente vinculados ao modelo numérico de Jacobsthal;

(iii) recursos computacionais podem ser empregados a fim de desenvolver um expediente de propriedades e vislumbrar rotinas para o ensino de conteúdos relacionados com a Sequência de Jacobsthal que possui uma circulação científica restrita ao periódicos especializados;

(iv) recentes propriedades matemáticas (generalizadas) sobre a Sequência de Jacobsthal não se mostram discutidas ou abordadas pelos compêndios especializados de História da Matemática.

Desse modo, assinalaremos alguns dos elementos que objetivam delinear os interesses subsequentes em nossa investigação. Desse modo, assinalaremos o seguinte objetivo: Desenvolver, descrever um roteiro ou transposição didática com a sequência de Jacobsthal. Tendo em vista a necessidade de uma metodologia de pesquisa e de uma metodologia de ensino, em caráter de complementaridade, adotaremos a ED2, tendo em vista nosso interesse na ação e mediação do professor e, no tocante ao ensino e abordagem, balizaremos nossa perspectiva na Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1998), como referência para a metodologia de ensino e ação planejada e preditiva para o professor de Matemática.

3. Engenharia Didática

Douady (1995, p. 2) comenta que o matemático francês Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941), no início do século, manifestou sérias preocupações sobre as condições de ensino e a formação do professor. Os esforços mais recentes são desenvolvidos em todo os países. Menciona ainda que reformas de programas foram decididos, decisões pedagógicas tomadas. Nesse contexto preocupante, Douady recorda que “sob a impulsão de pesquisadores de horizontes diferentes: matemática, psicologia, ciências da educação, e também linguística, história, sociologia, sobretudo na França [...]” se observou forte mobilização de mudanças e substituição de paradigmas no campo do ensino de Matemática.

Dessa forma, a partir dos anos 80, foram criados na França, centros universitários, espalhados em todo o pais que, de modo prosaico, impulsionaram a organização e trabalho conjunto de vários profissionais, de matizes e formações variadas, realmente preocupados com melhorias no sistema de ensino. Chamados de Institutos de Pesquisa sobre o ensino de Matemática (*Institut Universitaire de Recherche sur L´Enseignement des Mathématiques – IREM*), por intermédio do estabelecimento institucional e “transversal” desta estrutura de ideias possibilitou, segundo Douady (1984, p. 2), a evolução de pesquisas levando em consideração os três pólos: “professor, alunos de Matemática e sistema de ensino”.

Deparamos o surgimento da terminologia Engenharia Didática – ED que, a despeito da evolução de suas premissas, foi usada para designar/envolver um *modus operandi* de investigação ou ainda como “uma metodologia para a análise de situações didáticas” (ROBINET, 1983, p. 2). Recordamos que “o termo da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos” (DOUADY, 1995b, p. 62). Cabe acentuar que, de acordo com Artigue (2015, p. 467), a “concepção de design de investigação e a regra precisa em uma pesquisa depende, fortemente, de uma cultura educacional”. E, neste caso, fazemos referência à cultura didática francesa (ARTIGUE, 2015).

Margolinas & Drijvers (2015, p. 893) recordam que a Engenharia Didática (ED), na França, a disseminação e delimitação de um campo de estudos, direcionados e preocupados com os estilos de investigação e práticas de intervenção controladas, que passaram a receber o status de *design* de investigação, isto é, um paradigma metodológico que possa indicar o processo de condução sistemática de certas investigações que, quase de modo predominante, evolvem a intervenção nos espaços educacionais (GONDINO et all, 2013, p. 3). Logo mais adiante, Almouloud & Silva (2012, p. 26) explicam e distinguem duas vertentes importantes:

> *[...] a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica.*

Em todo caso, retomaremos ainda as duas tendências distintas da Engenharia Didática clássica ou de 1ª geração (ED1), compreendida como uma metodologia que visa o estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir o estudo controlado dos fenômenos em sala de aula, bem como, uma perspectiva de ED, visando o desenvolvimento de recursos de formação profissional que, segundo a tradição, tem recebido a denominação de Engenharia Didática de 2ª geração (ED2) ou engenharia de formação. Restringir-nos-emos aos aspectos característicos relativos com a ED2. Para a apropriação de um entendimento preciso a respeito da nossa perspectiva de análise afetada pel ED2, apreciamos as seguintes ponderações de Pastré, Mayen & Vergnaud (2006, p. 146 – 147) quando agregam ainda a terminologia de engenharia de formação o que concorre para um ponto de vista que assume condição central para o professor.

> *É um campo de práticas que consiste em construir dispositivos de formação correspondentes às necessidades identificadas, para um público dado, no quadro do seu meio de trabalho. A formação escolar possui, como tendência, a descontextualização das aprendizagens. A engenharia da formação deve, precisamente, insistir no contrário, sobre o contexto social, no qual devem ser efetuadas a aprendizagem dos adultos em formação. [...] A engenharia de formação se concretiza, principalmente, a partir de duas práticas: análise das necessidades e dos dispositivos de formação [...]*

Oriundo de contexto ampliado, os autores acima discutem a tendência da didática profissional (*didactique professionnelle*) que, em sua origem, deve ser centrada nos dispositivos eficazes de formação de profissionais. Margolinas (2004) aponta um entrave recorrente.

> *Na pesquisa educacional, incluindo as engenharias, sempre se relacionam com o professor, como um "participante ou é o destinatário dos trabalhos. Mas o papel do professor como um "objeto modalizável" foi de longa e de difícil construção. Eu irei situar inicialmente localizado no meu primeiro trabalho sobre este assunto no âmbito da pesquisa para o desenvolvimento da teoria das situações, E irei expor, em particular, as dificuldades do papel do professor conhecido dede o início dos anos 90. (MARGOLINAS, 2004, p. 12).*

Para exemplificar, trazemos um estudo recente de Tempier (2016) que apresenta dados de uma investigação balizada pela ED que pode ser enquadrada no viés de 2ª geração, posto que, Tempier (2016) manifestou o interesse "em uma metodologia que leva em consideração ciclos de concepções de uma fonte e experimentos para professores, mediante a comparação da análise *a priori* e *a posteriori*".

Tempier (2016, p. 263) recorda o problema levantado, originalmente, pela autora Margolinas et all (2011), na França, tendo em vista a dificuldade de divulgação e disseminação dos pressupostos (fundamentos) da ED como produtos efetivos para o ensino atual. Neste sentido, "o problema não é apenas o relacionado à determinação e implementação dos princípios teóricos que orientam a engenharia didática. Também está relacionado às possibilidades para que os professores adaptem esses princípios às condições de ensino comuns " (PERRIN-GLORIAN, 2011, p. 60).

Tempier (2016, p. 264) recorda que Perrin-Glorian propôs a metodologia de ED para o acumulo de fontes de recursos primários para a formação de professores. O caráter de imprescindibilidade comentado por Tempier repousa em duas questões fundantes: (a) A relevância das situações: as situações permitem que os alunos construam o conhecimento matemático pretendido (como nas engenharias de 1ª geração); (b) A adaptabilidade (e reprodução/replicação) das situações ao ensino comum: que as adaptações realizadas pelos professores durante a implementação das situações (como nas engenharias de 2ª geração).

Assim, na seção subsequente, ao assumirmos como pressuposto maior interesse pelas questões apontadas acima, indicadas no item (b), descreveremos a primeira fase de uma ED.

4. Análise *a priori*

Diante do interesse declarado desde a seção inicial, acentuamos nossa atenção maior pelo item (b) (apontado acima). A presente etapa, seguindo o procedimento *standard* das investigações dessa vertente, busca responder às questões levantadas e validar, refutar ou modificar as hipóteses indicadas há pouco. E, dando continuidade, "o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema" (ALMOULOUD, 2007, p. 174).

Na fase atual, manifestamos um profundo interesse pela "determinação e seleção dos elementos que permitem os comportamentos dos estudantes e seu significado" (ARTIGUE, 1995, p. 45). Por tal via, de modo sistemático e seguindo a tradição dos estudos dessa vertente, patenteamos uma parte descritiva e outra parte preditiva do presente aparato conceitual, embora desconsiderando sua ulterior confrontação com eventuais dados empíricos circunstanciados (que não deve ser realizada em nosso trabalho). Outrossim, recordamos que em um processo de ensino, “o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos” (MARGOLINAS, 1995, p. 344).

E, ainda, em todas as fases dialéticas previstas pela Teoria das Situações Didáticas – TSD (adotada como metodologia de ensino), registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação-didática (BROUSSEAU, 1986; 1988; 1998). Cabe esclarecer/distinguir um conjunto de elementos predominantemente considerados nas etapas dialéticas de ensino previstas por uma TSD, a saber:

Situação dialética de ação.

> *O aluno é confrontado com uma situação de onde se origina um problema. No âmbito de busca por uma solução, ele produz ações que podem concorrer para a elaboração de um conhecimento na prática (em ação). Em maior ou menor substância poderá explicitar suas razões, todavia, a situação não exige. (DOUADY, 1984, apud ARTIGUE, 1984, p. 7).*

Situação dialética de formulação.

> *Condições diferentes produzem a necessidade da mudança de informações e a criação de uma linguagem para assegurar/permitir tal mudança. Na situação de formulação, o estudante pode justificar suas ações, todavia, a situação não exige. (DOUADY, 1984, apud ARTIGUE, 1984, p. 7).*

Situação dialética de validação.

> *As mudanças não concernem apensas com a informação, mas, também, com o conjunto de declarações. Se torna necessário provar o que foi realizado por meio de uma ação na etapa passada. (DOUADY, 1984, apud ARTIGUE, 1984, p. 7).*

Situação dialética de institucionalização.

> *Se caracterizam pelo momento de fixação ou convenção explícita do estatuto cognitivo de um conhecimento ou saber. (BROUSSEAU, 1981, p. 17).*

Na seção subsequente, abordaremos com maior detalhamento, pormenorização e significação dos elementos teóricos apontados, com brevidade, nos trechos acima, a fim de maior significação relativamente ao problema considerado em nossa investigação, tendo em vista o ensino de propriedades generalizadas da Sequência de Jacobsthal.

5. Concepção e modelização das situações

De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2009, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deve proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância das variáveis micro-didáticas eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga predizer as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle. Ademais, recordamos que num processo de ensino, “o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir.

Com origem na discussão das seções predecessoras, iremos descrever alguns itinerários que permitem a adoção de uma trajetória de ensino de certas propriedades derivadas da sequência de Jacobsthal. Como temos acentuado, assinalaremos a elaboração de situações de ensino para a h(x)-Sequência Polinomial de Jacobsthal – h(x)-SPJ. Logo em seguida, apresentaremos três situações problemas, balizadas e estruturadas pela TSD.

De modo preliminar, vamos recordar as seguintes matrizes e suas correspondentes inversas:

$$C(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2x & 1\end{pmatrix}, C^{-1}(x)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2x} & \frac{1}{2x}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ h(x) & 1\end{pmatrix}, C_{h(x)}^{-1}(x)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{h(x)} & \frac{1}{h(x)}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Situação problema I: Em um artigo cientifico dos anos de 1990, encontramos a seguinte definição: Os números da forma $\{J_n(x)\}, n \in IN$, definidos pela seguinte regra de recorrência $J_{n+1}(x)=J_n(x)+2x\cdot J_{n-1}(x)=1$, e com as condições iniciais $J_0(x)=0, J_1(x)=1$ (HORADAM, 1997). Originalmente, a definição formal elaborada por Horadam (1997) é indicada apenas para índices inteiros positivos. Desse modo, que propriedades podem ser identificadas quando lidamos com índices inteiros quaisquer?

Situação de ação: “A constituição do sentido, tal como entendemos, implica numa interação constante dos alunos com situações problemáticas, interações dialéticas (caso o sujeito antecipe, finalize suas ações) [...]” (BROUSSEAU, 1998, p. 117). Dessa forma, alguns casos particulares podem ser examinados. Vamos considerar a relação de recorrência indicada $J_{n+1}(x)=J_n(x)+2x\cdot J_{n-1}(x)$, com os valores iniciais $J_0(x)=0, J_1(x)=1$. Desse modo, o professor deverá estimular as seguintes substituições particulares dos índices negativos, como por exemplo $n=0 \therefore J_1(x)=J_0(x)+2x\cdot J_{-1}(x)$ e, assim, vem que ocorre ainda o caso $1=0+2x\cdot J_{-1}(x)$ e, encontrar que

$$J_{-1}(x)=\frac{1}{2x}$$

No passo seguinte, pode verificar que $n=-1 \therefore J_0(x)=J_{-1}(x)+2x\cdot J_{-2}(x)$. Por conseguinte, deve encontrar $0=\frac{1}{2x}+2x\cdot J_{-2}(x) \leftrightarrow J_{-2}(x)=-\frac{1}{(2x)^2}$. No passo seguinte, continuando o processo:

$$n=-2 \therefore J_{-1}(x)=J_{-2}(x)+2x\cdot J_{-3}(x) \leftrightarrow \frac{1}{2x}=-\frac{1}{(2x)^2}+2x\cdot J_{-3}(x).$$

Consequentemente, determinar ainda $J_{-3}(x)=\frac{2x+1}{(2x)^3}$. Reparemos ainda, logo abaixo:

$$C^{-2}(x)=\begin{pmatrix}\frac{2x+1}{(2x)^2} & -\frac{1}{(2x)^2}\\ -\frac{1}{(2x)^1} & \frac{1}{(2x)^1}\end{pmatrix}, C^{-3}(x)=\begin{pmatrix}\frac{4x+1}{(2x)^3} & \frac{2x+1}{(2x)^3}\\ \frac{1+2x}{(2x)^2} & -\frac{1}{(2x)^2}\end{pmatrix}$$

$$C^{-4}(x)=\begin{pmatrix}\frac{4x^2+6x+1}{(2x)^4} & -\frac{4x+1}{(2x)^4}\\ -\frac{4x+1}{(2x)^3} & \frac{2x+1}{(2x)^3}\end{pmatrix}, C^{-5}(x)=\begin{pmatrix}-\frac{12x^2+8x+1}{(2x)^5} & \frac{2x+1}{(2x)^3}\\ \frac{4x^2+6x+1}{(2x)^4} & -\frac{4x+1}{(2x)^4}\end{pmatrix}$$

Situação de formulação: Com o arrimo dos casos particulares anteriores, a generalização deverá ser evidenciada, como por exemplo, a forma de escrever as potências das matrizes abaixo indicadas.

$$C^{-2}(x)=\begin{pmatrix} \frac{2x+1}{(2x)^2} & -\frac{1}{(2x)^2} \\ -\frac{1}{(2x)^1} & \frac{1}{(2x)^1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^2\frac{J_3(x)}{(2x)^2} & (-1)^{2+1}\frac{J_2(x)}{(2x)^2} \\ (-1)^{2+1}\frac{J_2(x)}{(2x)^{2-1}} & (-1)^{2+2}\frac{J_1(x)}{(2x)^{2-1}} \end{pmatrix}$$

$$C^{-3}(x)=\begin{pmatrix} -\frac{4x+1}{(2x)^3} & \frac{2x+1}{(2x)^3} \\ \frac{1+2x}{(2x)^2} & -\frac{1}{(2x)^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^3\frac{J_4(x)}{(2x)^3} & (-1)^{3+1}\frac{J_3(x)}{(2x)^3} \\ (-1)^{3+1}\frac{J_3(x)}{(2x)^{3-1}} & (-1)^{3+2}\frac{J_2(x)}{(2x)^{3-1}} \end{pmatrix}$$

$$C^{-4}(x)=\begin{pmatrix} \frac{4x^2+6x+1}{(2x)^4} & -\frac{4x+1}{(2x)^4} \\ -\frac{4x+1}{(2x)^3} & \frac{2x+1}{(2x)^3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^4\frac{J_5(x)}{(2x)^4} & (-1)^{2+1}\frac{J_4(x)}{(2x)^4} \\ (-1)^{4+1}\frac{J_4(x)}{(2x)^{4-1}} & (-1)^{4+2}\frac{J_3(x)}{(2x)^{4-1}} \end{pmatrix}$$

$$C^{-5}(x)=\begin{pmatrix} -\frac{12x^2+8x+1}{(2x)^5} & \frac{2x+1}{(2x)^5} \\ \frac{4x^2+6x+1}{(2x)^4} & -\frac{4x+1}{(2x)^4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^5\frac{J_{5+1}(x)}{(2x)^5} & (-1)^{5+1}\frac{J_5(x)}{(2x)^5} \\ (-1)^{5+1}\frac{J_5(x)}{(2x)^{5-1}} & (-1)^{5+2}\frac{J_{5-1}(x)}{(2x)^{5-1}} \end{pmatrix}$$

Situação de validação: Nessa fase, num contexto do "debate da certeza das asserções" (ALMOULOUD, 2007, p. 40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferências empregadas afim de obter a certeza das relações estabelecidas. Com origem nos casos anteriores, o professor (*expert*) deverá estimular a identificação de propriedades algébricas invariantes, tendo como escopo eleger, com auxílio do grupo de estudantes, uma fórmula fechada para as potências negativas das matrizes que será indicada e debatida entre o grupo de estudantes.

$$C^{-n}(x)=\begin{pmatrix} (-1)^n\frac{J_{n+1}(x)}{(2x)^n} & (-1)^{2+1}\frac{J_n(x)}{(2x)^n} \\ (-1)^{n+1}\frac{J_n(x)}{(2x)^{n-1}} & (-1)^{n+2}\frac{J_{n-1}(x)}{(2x)^{n-1}} \end{pmatrix}, n\geq 1.$$

Situação de institucionalização: Na fase atual, as informações coligidas do grupo de estudantes e organizadas e encaminhadas pelo professor, devem conduzir o grupo na busca pela generalização dos resultados. O conhecimento a ser incorporado pelo grupo foi extraído a partir de uma apreciação dos escritos atuais sobre o modelo de Jacobsthal. O teorema abaixo deverá ser demarcado pelo professor, como um símbolo de um novo saber a ser incorporado pelo grupo. O teorema abaixo não foi discutido nos trabalhos consultados.

Teorema: Para todo inteiro natural 'n', podemos determinar que:

(i) $$C^n(x)=\begin{pmatrix} 2x\cdot J_{n-1}(x) & J_n(x) \\ 2x\cdot J_n(x) & J_{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

(ii) $$C^{-n}(x)=\begin{pmatrix} (-1)^n\frac{J_{n+1}(x)}{(2x)^n} & (-1)^{n+1}\frac{J_n(x)}{(2x)^n} \\ (-1)^{n+1}\frac{J_n(x)}{(2x)^{n-1}} & (-1)^{n+2}\frac{J_{n-1}(x)}{(2x)^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Demonstração: (i) Por indução matemática, vamos observar a seguinte propriedade elementar matricial $C^{n+1}(x)=C^n(x)\cdot C^1(x)=\begin{pmatrix}2x\cdot J_{n-1}(x) & J_n(x)\\ 2x\cdot J_n(x) & J_{n+1}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2x & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2x\cdot J_n(x) & 2x\cdot J_{n-1}(x)+J_n(x)\\ 2x\cdot J_{n+1}(x) & 2x\cdot J_n(x)+J_{n+1}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\cdot J_n(x) & J_{n+1}(x)\\ 2x\cdot J_{n+1}(x) & J_{n+2}(x)\end{pmatrix},\forall n\geq 1.$$

Para o item (ii), repetiremos o argumento $C^{-(n+1)}(x)=C^{-n-1}(x)=C^{-n}(x)\cdot C^{-1}(x)=$

$$=\begin{pmatrix}(-1)^n\dfrac{J_{n+1}(x)}{(2x)^n} & (-1)^{n+1}\dfrac{J_n(x)}{(2x)^n}\\ (-1)^{n+1}\dfrac{J_n(x)}{(2x)^{n-1}} & (-1)^{n+2}\dfrac{J_{n-1}(x)}{(2x)^{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2x} & \dfrac{1}{2x}\\ 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}\dfrac{J_{n+1}(x)}{(2x)^{n+1}}+(-1)^{n+1}\dfrac{J_n(x)}{(2x)^n} & (-1)^{n+1}\dfrac{J_{n+1}(x)}{(2x)^n}\\ (-1)^{n+2}\dfrac{J_n(x)}{(2x)^n}+(-1)^{n+2}\dfrac{J_{n-1}(x)}{(2x)^{n-1}} & (-1)^{n+1}\dfrac{J_{n-1}(x)}{(2x)^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2xJ_n(x)+J_{n+1}(x)}{(2x)^{n+1}}\right) & (-1)^{n+1}\dfrac{J_{n+1}(x)}{(2x)^n}\\ (-1)^{n+2}\left(\dfrac{2xJ_{n-1}(x)+J_n(x)}{(2x)^n}\right) & (-1)^{n+1}\dfrac{J_n(x)}{(2x)^n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{J_{n+2}(x)}{(2x)^{n+1}}\right) & (-1)^{n+2}\dfrac{J_{n+1}(x)}{(2x)^{n+1}}\\ (-1)^{n+2}\left(\dfrac{J_{n+1}(x)}{(2x)^n}\right) & (-1)^{n+3}\dfrac{J_n(x)}{(2x)^n}\end{pmatrix},n\geq 1.\text{c.q.d.}$$

Situação problema II: Em um artigo cientifico dos anos de 2015, encontramos a seguinte definição: As funções polinomiais da forma $\{J_{h,n}(x)\},n\in IN$, definidos pela seguinte regra de recorrência $J_{h,n+1}(x)=J_{h,n}(x)+h(x)\cdot J_{h,n-1}(x),\mathrm{n}>0$ com as condições iniciais $J_{h,0}(x)=0,J_{h,1}(x)=1$, aonde $h(x)$ é um polinômio arbitrário qualquer, determina a h(x)-Sequência Polinomial de Jacobsthal – h(x)-SPJ. (CATARINO & MORGADO, 2015). $J_0(x)=0,J_1(x)=1$ (CATARINO & VASCO, 2015). Decida que propriedades podem ser generalizadas, tomando como referência a situação problema I.

Situação de ação: O professor deverá estimular as atividades dos alunos, com o sentido de determinar os valores e o comportamento particular, para alguns índices inteiros positivos. Por exemplo, vendo que $n=0\therefore J_{h,1}(x)=J_{h,0}(x)+h(x)\cdot J_{h,-1}(x)$. Desse modo, verifica que $1=0+h(x)\cdot J_{h,-1}(x)\leftrightarrow J_{h,-1}(x)=\dfrac{1}{h(x)}$.

No caso seguinte, veremos que $n=-1\therefore J_{h,0}(x)=J_{h,-1}(x)+h(x)\cdot J_{h,-2}(x)$. Desse modo, deve ver que $0=\dfrac{1}{h(x)}+h(x)\cdot J_{h,-2}(x)\leftrightarrow J_{h,-2}(x)=-\dfrac{1}{(h(x))^2}$.

Mais uma vez, o professor deverá evidenciar que para o subsequente valor

$$n=-2\therefore J_{h,-1}(x)=J_{h,-2}(x)+h(x)\cdot J_{h,-3}(x)\leftrightarrow\frac{1}{h(x)}=-\frac{1}{(h(x))^2}+h(x)\cdot J_{h,-3}(x).$$

Por outro lado, poderá ainda escrever:

$$\frac{1}{h(x)}+\frac{1}{(h(x))^2}=h(x)\cdot J_{h,-3}(x)\leftrightarrow J_{h,-3}(x)=\frac{h(x)+1}{(h(x))^3}.$$

Os casos particulares inspecionados devem estimular o raciocínio indutivo dos estudantes (semelhante ao caso anterior). Desse modo, o professor inicia a promoção de um cenário de aprendizagem envolvendo o uso explícito de um modelo matemático.

Situação de formulação: Agora, com o auxílio da matriz que indicamos por $C^{1}_{h(x)}(x)$ e $C^{-1}_{h(x)}(x)$, o professor deve estimular a determinação de potências do tipo $C^{n}_{h(x)}(x)$ e $C^{-n}_{h(x)}(x), \mathrm{n} \geq 1$. De fato, no primeiro caso, deve promover, juntamente com os estudantes, a determinação das seguintes matrizes:

$$C_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{pmatrix}, C_{h(x)}{}^{2}(x)=\begin{pmatrix} h(x) & 1 \\ h(x) & h(x)+1 \end{pmatrix}, C_{h(x)}{}^{3}(x)=\begin{pmatrix} h(x) & h(x)+1 \\ h(x)(\mathrm{h(x)}+1) & (2h(x)+1) \end{pmatrix}, C_{h(x)}{}^{4}(x)=$$

$$\begin{pmatrix} h(x)(\mathrm{h(x)}+1) & (2h(x)+1) \\ h(x)(2\,\mathrm{h(x)}+1) & h(x)^2+3h(x)+1 \end{pmatrix}, C_{h(x)}{}^{5}(x)=\begin{pmatrix} h(x)(2\,\mathrm{h(x)}+1) & h(x)^2+3h(x)+1 \\ h(x)(h(x)^2+3h(x)+1) & (3h(x)^2+4h(x)+1) \end{pmatrix}$$

$$C_{h(x)}{}^{6}(x)=\begin{pmatrix} h(x)(h(x)^2+3h(x)+1) & (3h(x)^2+4h(x)+1) \\ h(x)(3h(x)^2+4h(x)+1) & 6h(x)^2+5h(x)+h(x)^3+1 \end{pmatrix}, C_{h(x)}{}^{7}(x)=$$

$$=\begin{pmatrix} h(x)(3h(x)^2+4h(x)+1) & 6h(x)^2+5h(x)+h(x)^3+1 \\ h(x)(6h(x)^2+5h(x)+h(x)^3+1) & (4h(x)^3+10h(x)^2+6h(x)+1) \end{pmatrix}, C_{h(x)}{}^{8}(x)=$$

$$=\begin{pmatrix} h(x)(6h(x)^2+5h(x)+h(x)^3+1) & (4h(x)^3+10h(x)^2+6h(x)+1) \\ h(x)(4h(x)^3+10h(x)^2+6h(x)+1) & (10h(x)^3+15h(x)^2+7h(x)+h(x)^4+1) \end{pmatrix}.$$

Agora, listamos o caso das potências matriciais do tipo $C^{-1}_{h(x)}(x), C^{-2}_{h(x)}(x), C^{-3}_{h(x)}(x), C^{-4}_{h(x)}(x), C^{-5}_{h(x)}(x), C^{-6}_{h(x)}(x), \ldots, C^{-n}_{h(x)}(x), \ldots$. De fato, o professor deverá estimular a identificação das propriedades invariantes nos casos abaixo.

$$C^{-1}_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{h(x)} & \dfrac{1}{h(x)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C^{-2}_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{h(x)+1}{h(x)^2} & -\dfrac{1}{h(x)^2} \\ -\dfrac{1}{h(x)^{2-1}} & \dfrac{1}{h(x)^{2-1}} \end{pmatrix}, C^{-3}_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{(2h(x)+1)}{h(x)^3} & \dfrac{h(x)+1}{h(x)^3} \\ \dfrac{h(x)+1}{h(x)^{3-1}} & -\dfrac{1}{h(x)^{3-1}} \end{pmatrix}$$

$$C^{-4}_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{(h(x)^2+3h(x)+1)}{h(x)^4} & -\dfrac{(2h(x)+1)}{h(x)^4} \\ -\dfrac{(2h(x)+1)}{h(x)^3} & \dfrac{1}{h(x)^3} \end{pmatrix}, C^{-5}_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{(3h(x)^2+4h(x)+1)}{h(x)^5} & \dfrac{(h(x)^2+3h(x)+1)}{h(x)^5} \\ \dfrac{(h(x)^2+3h(x)+1)}{h(x)^4} & -\dfrac{1}{h(x)^4} \end{pmatrix},$$

$$C^{-6}_{h(x)}(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{(\mathrm{h(x)}^3+6h(x)^2+5h(x)+1)}{h(x)^6} & -\dfrac{(3\,\mathrm{h(x)}^2+4h(x)+1)}{h(x)^6} \\ -\dfrac{(3\,\mathrm{h(x)}^2+4h(x)+1)}{h(x)^{6-1}} & \dfrac{(h(x)^2+3h(x)+1)}{h(x)^{6-1}} \end{pmatrix}, C^{-7}_{h(x)}(x)=$$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{(4h(x)^3+10h(x)^2+6h(x)+1)}{h(x)^7} & \dfrac{(6h(x)^2+5h(x)+h(x)^3+1)}{h(x)^7} \\ \dfrac{(6h(x)^2+5h(x)+h(x)^3+1)}{h(x)^{7-1}} & -\dfrac{(3h(x)^2+4h(x)+1)}{h(x)^{7-1}} \end{pmatrix}, C^{-8}_{h(x)}(x)=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(h(x)^4+10h(x)^3+15h(x)^2+7h(x)+1)}{h(x)^8} & -\dfrac{(4h(x)^3+10h(x)^2+6h(x)+1)}{h(x)^8} \\ -\dfrac{(4h(x)^3+10h(x)^2+6h(x)+1)}{h(x)^{8-1}} & \dfrac{(6h(x)^2+5h(x)+h(x)^3+1)}{h(x)^{8-1}} \end{pmatrix}.$$

Situação de validação: Finalmente, por intermédio do modelo de indução matemática, o professor deve estimular aos estudantes no intuito da identificação e entendimento das relações que generalizam o comportamento das potências das matrizes. Por exemplo, vemos:

$$C_{h(x)}{}^2(x)=\begin{pmatrix} h(x) & 1 \\ h(x) & h(x)+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h(x)\cdot 1 & \cdot 1 \\ h(x) & (h(x)+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h(x)\cdot 1 & 1\cdot 1 \\ h(x) & 1\cdot(h(x)+1) \end{pmatrix}$$

O professor deverá, na fase atual, observar a seguinte forma de escrever $C_{h(x)}^{-2}(x)=$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{h(x)+1}{h(x)^2} & -\dfrac{1}{h(x)^2} \\ -\dfrac{1}{h(x)^{2-1}} & \dfrac{1}{h(x)^{2-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^2}{h(x)^2}\cdot(h(x)+1) & (-1)^{2+1}\dfrac{1}{h(x)^2}\cdot 1 \\ (-1)^{2+1}\dfrac{1}{h(x)^{2-1}}\cdot 1 & \dfrac{1}{h(x)^{2-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h(x)\dfrac{(-1)^2}{h(x)^3}\cdot \mathrm{J}_{h(x),3}(\mathrm{x}) & (-1)^{2+1}\dfrac{1}{h(x)^2}\cdot \mathrm{J}_{h(x),2}(\mathrm{x}) \\ h(x)\dfrac{(-1)^{2+1}}{h(x)^2}\cdot \mathrm{J}_{h(x),2}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^2}{h(x)^{2-1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}$$

De sorte que, enseja transmitir as formas fechadas para as seguintes leis de formação:

$$C_{h(x)}{}^n(x)=\begin{pmatrix} h(x)\cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \\ h(x)\cdot J_{h,n+1}(x) & J_{h,n+3}(x) \end{pmatrix}, n\geq 1.$$

$$C_{h(x)}^{-3}(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{(2h(x)+1)}{h(x)^3} & \dfrac{h(x)+1}{h(x)^3} \\ \dfrac{h(x)+1}{h(x)^{3-1}} & -\dfrac{1}{h(x)^{3-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h(x)\dfrac{(-1)}{h(x)^4} & \dfrac{(-1)}{h(x)^3} \\ h(x)\dfrac{(-1)}{h(x)^3} & \dfrac{(-1)}{h(x)^{3-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h(x)\dfrac{(-1)^2}{h(x)^3}\cdot \mathrm{J}_{h(x),3}(\mathrm{x}) & (-1)^{2+1}\dfrac{1}{h(x)^2}\cdot \mathrm{J}_{h(x),2}(\mathrm{x}) \\ h(x)\dfrac{(-1)^{2+1}}{h(x)^2}\cdot \mathrm{J}_{h(x),2}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^2}{h(x)^{2-1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}$$

$$C_{h(x)}^{-n}(x)=\begin{pmatrix} h(x)\dfrac{(-1)^n}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^n}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ h(\mathrm{x})\dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^n}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n-1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}$$

Situação de institucionalização: O conhecimento matemático que o *expert* deverá convencionar ou fixar (ARTIGUE, 1984, p. 8), seguindo os rituais acadêmicos, indicando o estatuto cognitivo de um novo saber, rico em relações conceituais. Desse modo, o segundo teorema, igualmente não discutido em Catarino & Morgado (2016), será enunciado, com origem nos casos anteriormente discutidos. Cabe observar que o professor tem a oportunidade de inserir, ao universo ou cultura acadêmica dos estudantes, um teorema que se mostra restrito aos artigos científicos especializados.

Teorema: Para qualquer inteiro positivo $n \geq 1$, podemos determinar que:

(i) $C_{h(x)}{}^{n}(x) = \begin{pmatrix} h(x)\cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \\ h(x)\cdot J_{h,n+1}(x) & J_{h,n+3}(x) \end{pmatrix}$

(ii) $$C_{h(x)}^{-n}(x) = \begin{pmatrix} h(x)\dfrac{(-1)^{n}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ h(\mathrm{x})\dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n-1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}$$

(iii) $J_{h,n}(x)\cdot J_{h,n+3}(x) - J_{h,n+1}(x)^{2} = (-1)^{n}\cdot h(x)^{n-1}$.

Demonstração. Para o item (i), basta observar que $C_{h(x)}{}^{n+1}(x) = C_{h(x)}{}^{n}(x)\cdot C_{h(x)}(x) =$

$$= \begin{pmatrix} h(x)\cdot J_{h,n-1}(x) & J_{h,n}(x) \\ h(x)\cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h(x)\cdot J_{h,n}(x) & h(x)J_{h,n-1}(x) + J_{h,n}(x) \\ h(x)\cdot J_{h,n+1}(x) & h(x)J_{h,n}(x) + J_{h,n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x)\cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \\ h(x)\cdot J_{h,n+1}(x) & J_{h,n+2}(x) \end{pmatrix}, \forall n \in IN.$$

No que concerne ao item (ii), vamos repetir a propriedade anterior, e tomar a seguinte potência matricial e decompor no produto indicado por: $C_{h(x)}^{-(n+1)}(x) = C_{h(x)}^{-n}(x)\cdot C_{h(x)}^{-1}(x) =$

$$= \begin{pmatrix} h(x)\dfrac{(-1)^{n}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ h(\mathrm{x})\dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n-1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{h(x)} & \dfrac{1}{h(x)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h(x)\dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n+2}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) + \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ h(\mathrm{x})\dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) + \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n-1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}) & \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}h(x)\left(\dfrac{1}{h(x)^{n+2}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) + \dfrac{1}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x})\right) & \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ (-1)^{n+2}h(x)\left(\dfrac{1}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) + \dfrac{1}{h(x)^{n}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}-1}(\mathrm{x})\right) & \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}h(x)\left(\dfrac{(\mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) + h(x)\,\mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}))}{h(x)^{n+2}}\right) & \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ (-1)^{n+2}h(x)\left(\dfrac{(\mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) + h(x)\,\mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}-1}(\mathrm{x})}{h(x)^{n+1}}\right) & \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}h(x)\left(\dfrac{(\mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+2}(\mathrm{x}))}{h(x)^{n+2}}\right) & \dfrac{(-1)^{n+1}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x}) \\ (-1)^{n+2}h(x)\left(\dfrac{(\mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}+1}(\mathrm{x})}{h(x)^{n+1}}\right) & \dfrac{(-1)^{n+2}}{h(x)^{n+1}}\cdot \mathrm{J}_{h(x),\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}, \forall n \in IN.(\mathrm{c.q.d.})$$

Para concluir, no item (iii), basta tomar o determinante da matriz indicada por $\det C_{h(x)}{}^{n}(x)=\det[C_{h(x)}(x)\cdot C_{h(x)}(x)\cdots C_{h(x)}(x)]=\det[C_{h(x)}(x)]\cdot\det[C_{h(x)}(x)]\cdots\det[C_{h(x)}(x)]$ $=\underbrace{(-h(x))\cdot(-h(x))\cdot\cdots\cdot(-h(x))\cdot(-h(x))}_{n\text{ vezes}}=(-1)^n\cdot h(x)^n$. Dessa forma, verificamos que $\det C_{h(x)}{}^{n}(x)=(-1)^n\cdot h(x)^n$. Por outro lado, pelo item (i), vale que:

$$\det\begin{pmatrix} h(x)\cdot J_{h,n}(x) & J_{h,n+1}(x) \\ h(x)\cdot J_{h,n+1}(x) & J_{h,n+3}(x)\end{pmatrix}=h(x)\cdot J_{h,n}(x)\cdot J_{h,n+3}(x)-h(x)\cdot J_{h,n+1}(x)^2=h(x)\cdot\left(J_{h,n}(x)\cdot J_{h,n+3}(x)-J_{h,n+1}(x)^2\right)$$

$$\det C_{h(x)}{}^{n}(x)=(-1)^n\cdot h(x)^n=h(x)\cdot\left(J_{h,n}(x)\cdot J_{h,n+3}(x)-J_{h,n+1}(x)^2\right),\forall n\geq 1.$$

Situação problema III: A partir da relação de recorrência estudada por Erns Jacobsthal, definida por $J_n=J_{n-1}+2J_{n-2}, n\geq 2$, e valores iniciais $J_0=0, J_1=1$, podemos facilmente determinar a expressão explicita para os termos da sequência acima, indicada por

$$J_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3},\forall n\in IN.$$

Decida se uma expressão correspondente pode ser verificada, como decorrência da definição de Catarino & Morgado (2016).

Situação de ação: O professor deverá estimular a adaptação do mesmo raciocínio que encontramos no artigo de Horadam (1996). De fato, vamos tomar a relação de recorrência definida por Catarino & Morgado (2016) e efetuar as seguintes alterações:

$$J_{h,n+1}(x)=J_{h,n}(x)+h(x)\cdot J_{h,n-1}(x)\therefore\frac{J_{h,n+1}(x)}{J_{h,n}(x)}=1+h(x)\cdot\frac{J_{h,n-1}(x)}{J_{h,n}(x)}=1+h(x)\cdot\frac{1}{J_{h,n}(x)/J_{h,n-1}(x)}$$

Repetiremos um argumento anterior, definindo o quociente

$$t_{n+1}(x)=\frac{J_{h,n+1}(x)}{J_{h,n}(x)},n\geq 0$$

Logo em seguida, determinamos que:

$$t_{n+1}(x)=1+h(x)\cdot\frac{1}{t_n(x)}\leftrightarrow t_{n+1}(x)t_{n+1}(x)=t_{n+1}(x)+h(x)$$

Mais uma vez, se assumirmos que existe o seguinte limite $\lim_{n\to\infty}t_n(x)=\mathrm{t(x)}$ veremos ainda que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(t_{n+1}(x)\cdot t_{n+1}(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(t_{n+1}(x)+h(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(t_{n+1}(x)\right)+h(x)\therefore t(x)^2-t(x)-h(x)=0.$$

Agora, considerando a equação $t(x)^2-t(x)-h(x)=0$ poderemos determinar uma expressão para as raízes correspondentes e designadas por $\alpha(x),\beta(\mathrm{x})$ de sorte que, observamos as seguintes relações $\alpha(x)+\beta(\mathrm{x})=-1;\alpha(x)\cdot\beta(\mathrm{x})=-h(x)$. Desse modo, podemos assumir que $\alpha(x)^2=\alpha(x)+h(x)=\alpha(x)\cdot 1+h(x)\cdot 1$. Ou ainda, observamos também $\alpha(x)^3=\alpha(x)\alpha(x)^2=\alpha(x)^2+\alpha(x)h(x)=\alpha(x)+h(x)+\alpha(x)h(x)=\alpha(x)\cdot(1+h(x))+h(x)\cdot 1$. Com isto, podemos ainda determinar que ocorre $\alpha(x)^4=\alpha(x)\left(\alpha(x)(1+h(x))+h(x)\right)=$ $=\left(\alpha(x)+h(x)\right)\cdot(1+h(x))+h(x)\alpha(x)=\alpha(x)+\alpha(x)h(x)+h(x)+h(x)^2+h(x)\alpha(x)$. Desse modo, verificar que $\alpha(x)^4=\alpha(x)(1+2h(x))+h(x)(1+h(x))=\alpha(x)J_{h(x),4}(x)+h(x)J_{h(x),3}(x)$.

Sucessivamente (e indutivamente), devemos determinar a seguinte relação recursiva $\alpha(x)^n = \alpha(x)J_{h(x),\mathrm{n}}(x) + h(x)J_{h(x),\mathrm{n}-1}(x)$.

Por outro lado, podemos verificar que $\alpha(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+h(x)^2}}{2}$, $\beta(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+h(x)^2}}{2}$

Determinamos a seguinte expressão $\alpha(x) - \beta(\mathrm{x}) = \sqrt{1+h(x)^2}$. Por fim, empregando a mesma propriedade para a outra raiz $\beta(x)^n = \beta(x)J_{h(x),\mathrm{n}}(x) + h(x)J_{h(x),\mathrm{n}-1}(x)$, obteremos o seguinte sistema de duas equações
$$\begin{cases} \alpha(x)^n = \alpha(x)J_{h(x),\mathrm{n}}(x) + h(x)J_{h(x),\mathrm{n}-1}(x) \\ \beta(x)^n = \beta(x)J_{h(x),\mathrm{n}}(x) + h(x)J_{h(x),\mathrm{n}-1}(x) \end{cases}$$

Efetuando a diferença das expressões acima no sistema, verificamos $\alpha(x)^n - \beta(x)^n =$
$= \alpha(x)J_{h(x),\mathrm{n}}(x) + h(x)J_{h(x),\mathrm{n}-1}(x) - \beta(x)J_{h(x),\mathrm{n}}(x) + h(x)J_{h(x),\mathrm{n}-1}(x) = (\alpha(x) - \beta(x)) \cdot J_{h(x),\mathrm{n}}(x)$.

Por fim, determinamos que $J_{h(x),\mathrm{n}}(x) = \dfrac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)} = \dfrac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\sqrt{1+4h(x)}}, n \geq 0.$

Finalmente, efetuando as substituições dos índices correspondentes, verificaremos ainda:

$$J_{h(x),-\mathrm{n}}(x) = \frac{\alpha(x)^{-n} - \beta(x)^{-n}}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{\dfrac{1}{\alpha(x)^n} - \dfrac{1}{\beta(x)^n}}{\alpha(x) - \beta(x)} = \frac{1}{(\alpha(x)\beta(x))^n} \frac{\beta(x)^n - \alpha(x)^n}{(\alpha(x) - \beta(x))} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{h(x)}^n} \cdot \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{(\alpha(x) - \beta(x))} = \frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{h(x)}^n} \cdot J_{h(x),\mathrm{n}}(x) \therefore J_{h(x),-\mathrm{n}}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{h(x)}^n} \cdot J_{h(x),\mathrm{n}}(x).$$

Assim, a resposta ao questionamento indicado na situação problema III é afirmativa e que foi indicada anteriormente por $J_{h(x),\mathrm{n}}(x) = \dfrac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}$.

Por outro lado, o processo semelhante que comentamos no início do trabalho, de extensão ao campos dos índices inteiros, também é válido para a sequência polinomial generalizada, discutida por Catarino & Morgado (2016), cuja expressão foi verificada como sendo indicada por

$$J_{h(x),-\mathrm{n}}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{h(x)}^n} \cdot J_{h(x),\mathrm{n}}(x), n \geq 0.$$

Situação de institucionalização: Na situação (III), todos os argumentos anteriores, no que concerne a determinação do termo geral e da extensão ao campo dos inteiros, que foi indicada no caso da sequência original de Jacobsthal, são generalizados para a família de h(x)-polinômios de Jacobsthal. Ademais, alguns dos argumentos abordados são circunscritos ao universo de discussão de artigos científicos de Matemática Pura ou Aplicada. Tal discussão, promovida pelo professor, deverá atuar no sentido da compreensão da ininterrupta evolução das teorias e modelos matemáticos.

6. Alguns elementos na validação de ED

No bojo das preocupações do professor-pesquisador com as respectivas produções dos estudantes são previstas, numa ED, uma etapa de *validação interna* da sequência didática, bem como uma etapa de *validação externa*. A primeira envolve "uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes" (LABORDE, 1997, p. 105). Laborde (1997, p. 105) explica que a *validação externa* envolve uma comparação das produções dos estudantes antes ou ao longo da sequência, ou ainda após experimentação em sala, o que pode ocorrer por meio de entrevistas individuais ou em grupo, bem como por meio de questionários. E, também, por meio da comparação de produções externas, envolvendo outros alunos não submetidos à mesma sequência estruturada de ensino abordada na seção preliminar, ou ainda dados provenientes de outros estilos de investigação.

Desde que, desenvolvemos uma abordagem (teórica) descritiva, das duas fases iniciais (análise preliminar, análise *a priori* e concepção de situações), com o amparo da ED2, acentuamos características particulares envolvendo propriedades matemáticas derivadas da h(x)-sequência polinomial de Jacobsthal. Desse o modo, a situações apresentadas podem suprir a necessidade de acesso, por parte de professores que atuam no locus acadêmico, relativamente a determinados conteúdos matemáticos que, em nosso assunto discutido, encontram-se abordados em um círculo cientifico estritamente limitado.

De modo simplificado, a tabela abaixo poderá ser discutida e explorada com o grupo de estudantes. O professor deverá assinalar o período ou percurso temporal evolutivo (matemático) histórico, desde a descrição da sequência original e, suas formas generalizadas (derivadas), sobretudo, com apelo ao modelo das funções polinomiais e propriedades matriciais que, em decorrência de seu uso, sobretudo no estudo da generalização da sequência de Fibonacci, na década de 60, passou a repercutir no modelo generalizante de várias outras sequências numéricas (ALVES & CATARINO, 2017a).

A tabela abaixo poderá auxiliar ao professor no intento de institucionalizar, no sentido de Brousseau (1986), no grupo de estudantes um processo evolutivo, recorrentemente, desconsiderado por parte dos livros de História da Matemática, e que pode enriquecer a cultura acadêmica matemática de graduação que, como mencionamos preliminarmente, costuma acentuar aspectos frívolos e episódicos sobre o uma trajetória evolutiva de certos assuntos.

Tabela I: Quadro simplificado sobre o processo evolutivo e de generalização das definições matemáticas formais decorrentes do modelo de Jacobsthal.

Descrição e definição formal	Representação polinomial e matricial derivada da sequência de Jacobsthal
$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ $J_0 = 0, J_1 = 1.$ (JACOBSTHAL, 1919)	$J_{n+1}(x) = J_n(x) + 2x \cdot J_{n-1}(x), \mathrm{n} > 0$. (HORADAM, 1996; 1997) $J_{n+1}(x) = J_n(x) + h(x) \cdot J_{n-1}(x), \mathrm{n} > 0$ (CATARINO & MORGADO, 2016)

$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \forall n \in IN$ $J_{2x,n}(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}$ (HORADAM, 1996; 1997)	$J_{h(x),n}(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}$, para inteiro $n > 0$. (CATARINO & MORGADO, 2016) h(x) uma função polinomial qualquer.
$J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_n$	$J_{h(x),-n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{h(x)^n} \cdot J_{h(x),n}(x)$. (*)
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$	$C_{2x}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}_{2x2}, C_{h(x)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h(x) & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$ (CATARINO & MORGADO, 2016)
$C_{2x}^n(x)$ e $C_{h(x)}^n(x)$, com $n > 0$.	$C_{2x}^{-n}(x)$ e $C_{h(x)}^{-n}(x)$, com $n > 0$. (*)
$J_{n.m}(x) = J_{n-1,m}(x) + 2x \cdot J_{n-2,m}(x)$, $n \geq m, n = 1, 2, 3, \ldots, m-1$. (DJORIJEVIC, 2000)	$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}, J_1 = \begin{pmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix}_{2x2}$ (UYGUN, 2016)

Fonte: elaboração dos autores.

Podemos ainda observar os recentes trabalhos introduzidos por Uygun & Uslu (2016) e Uygun & Uslu (2013; 2015) que introduzem e generalizaram a noção de sequência recorrente matricial de Jacobsthal. Vejamos uma última definição.

Definição 7: Vamos considerar $s > 0, t \neq 0, s^2 + 8t > 0, \mathrm{n} \geq 1$ um inteiro qualquer. A seguinte recorrência $\Im_{n+1}(s, \mathrm{t}) = \mathrm{s} \cdot \Im_n(s, \mathrm{t}) + 2t \cdot \Im_{n-1}(s, \mathrm{t})$ com valores iniciais indicados por

$$\Im_0(s, \mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Im_1(s, \mathrm{t}) = \begin{pmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$ (UYGUN & USLU, 2015).

A definição anterior constata que a pesquisa atual sobre sequências recorrentes matriciais de Jacobsthal preservam o interesse de especialistas em vários países e tais informações constituem elementos importantes para a constituição de uma cultura própria do professor de Matemática, envolvendo elementos de ordem histórica e epistemológica (ALVES, 2018).

7. Considerações Finais

Nas seções passadas, abordamos os elementos essenciais e fundantes que deve proporcionar um planejamento sistemático de uma etapa de preparação, tendo com o escopo a realização de uma transposição didática com o tema envolvendo a sequência recorrente dos h(x)-polinômios de Jacobsthal. Com origem em um rápido expediente de apreciação de um conjunto de seis definições matemáticas formais, constatamos que, com origem no modelo numérica da sequência de Fibonacci, vários outros matemáticos profissionais, dentre eles, Erns Jacobsthal, se interessaram pelo processo de generalização de sequências numéricas emblemáticas, dentre elas, acentuamos propriedades, costumeiramente, negligenciadas pelos autores de livros de História da Matemática (ALVES, 2016c; 2016d; 2018).

Desse modo, a partir de uma distinção necessária e fundamental de uma ED1, que evidencia maior preocupação com a modelização e ação do estudante, ao buscar acumular conhecimentos sobre os processos de aprendizagem envolvidos no ensino de determinados conteúdos matemáticos, optamos pelo desenvolvimento e descritivos para uma ED2, posto que, a mesma, manifesta maior atenção ao processo de modelização, descrição e planejamento de ação e transposição didática do professor e, em nosso caso, restringimos nossas considerações a um conjunto de propriedades derivadas dos h(x)-polinômios de Jacobsthal, discutidos, com vários aspectos de ineditismo, no trabalho de Catarino & Morgado (2016), que introduzem na literatura uma forma generalizada de uma sequência recorrente polinomial de Jacobsthal.

Ademais, algumas das propriedades discutidas e verificadas por indução matemática, com origem nas situações apresentadas, não foram discutidas e pormenorizadas por Catarino & Morgado (2016). Não obstante, envolvem um conhecimento compatível para ser abordado em uma disciplina de graduação em Matemática, cujo interface com a História da Matemática se mostre mais acentuado.

Como mencionamos nas seções precedentes, o conteúdo matemático em foco, originalmente, pode ser encontrado em escritos acadêmicos de Matemática Pura e Aplicada (BERGUM, BENNETTT, HORADAM & MOORE, 1985; CERIN, 2007a; 2007b; COOK & BACON, 2013; DJORJEVIC, 2000; FREY & SELLERS, 2000; HORADAM, 1996). Por conseguinte, as situações problemas apresentadas, com o balizamento da TSD, devem permitir um roteiro para uma transposição didática do professor que atua no *locus* acadêmico, e, de modo particular, para uma ação no contexto da investigação em História da Matemática.

Por fim, assumimos em nossos trabalhos o caráter de imprescindibilidade de transmitir aos estudantes o entendimento sobre os processos e engendramento das condições históricas e epistemológicas que concorreram para a evolução progressiva e ininterrupta dos conceitos científicos matemáticos. Não obstante, a despeito da importância inconteste do componente histórico, o professor não pode descuidar, ainda, de veicular, transmitir em sua sala de aula, informações acerca do estádio atual e hodierno dos mesmos. Tal ponto de vista fortalece a compreensão sobre um processo evolutivo ininterrupto e contíguo da Matemática. E, em nosso caso, com o amparo de uma ED2, teremos uma trajetória definida para o ensino das h(x)-funções polinomiais de Jacobsthal.

9. Referências

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, Francisco. R. V. On the teaching of Catalan Numbers. **Acta Didactica Naposcencia**. v. 11, nº 1, 25 – 40. 2018. Disponível em: http://adn.teaching.ro/

ALVES, Francisco. R. V.; ALVES DIAS, Marlene. Formação de Professores de Matemática: um contributo de engenharia didática (ED). **REVEMAT**, v. 12, nº 2, 192 – 209. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n2p192/36380

ALVES, Francisco. R. V; Sampaio, Góes. C.; Vasconcellos, A. K. & Barroso, Maria. C. S. Didática das Ciências e Matemática: alguns pressupostos. **Interfaces da Educação**, v. 8, nº 22, 274 – 302, 2017.

ALVES, Francisco. R. V. & CATARINO, Paula. M. A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v. 14, 112-136, 2017a.

ALVES, Francisco, R. V. & CATARINO, Paula. M. A. Generalized jacobsthal sequence (gjs): an historical investigation with the maple´s help. **Acta Didactica Napocensia**, 2017b.

ALVES, Francisco. R. V. & CATARINO, Paula. M. The Bivariate (Complex) Fibonacci and Lucas Polynomials: an historical investigation with the maple´s help. **Acta Didactica Napocensia**, v. 9, 71 - 95, 2016.

ALVES, Francisco. R. V. Sequência de Pell Generalizada – SGP: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista THEMA**, v. 13, nº 1, 1 – 25, 2016c.

ALVES, Francisco. R. V. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. **BOLETIM GEPEM**, nº 69, 1 – 7, 2016d.

ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa**. v, 18, nº 1, 61 – 93, 2016h.

AKTAS, Ibrahim. & KÖSE, Hasan. Hessenberg matrices and the pell-lucas and jacobsthal numbers. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**. v. 101, nº 3, 425 – 432. 2015. Disponível em: http://www.ijpam.eu/contents/2015-101-3/11/11.pdf

ALVES, Francisco. R. V. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Revista Interfaces da Educação**, v. 7, nº 21, 131 – 150, 2016i.

ARTIGUE, Michelle. Ingénierie Didactiques. Brun, J. (org.). **Didactiques de Mathématiques**, 243 – 264. Lagrange J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France. 1996.

ARTIGUE, Michelle. Épistémologie et Didactiques. **Recherche en Didactiques des Mathématiques**, v. 10, nº 2, 241 – 286, 1989.

ARTIGUE, Michelle. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques.. **Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques**, 8(1), 1 – 38, 1984.

ARTIGUE, Michelle. Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário? **Boletín de La Asociatíon Venezolana**, v. X, nº 2, 117-134, 2003.

ARTIGUE, Michelle. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.), Nordic Research in Mathematics Education. **Proceedings from NORMA08** (p.7 - 16). Rotterdam: Sense Publishers, 2009. Disponível em: <https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=212293>. Acesso em: maio de 2017.

ARTIGUE, Michelle. L´éducation mathématiques comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, 3(3), 1 – 18, 2012.

ARTIGUE, M. L´impact curriculaire des Technologies sur L´Éducation Mathématiques. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, 4(1), p. 1 – 15, 2013.

BERGUM, G. E.; BENNETT, Larry.; HORADAM. A. F. & MOORE, S. D. Jacobsthal polynomials concerning fibonacci and a conjecture -like matrices. **The Fibonacci Quarterlly**. v. 23, nº 3, 240 – 249, August, 1985. Disponivel em: http://www.fq.math.ca/Scanned/23-3/bergum.pdf

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. G. Brousseau, (org.). ***Théorie des situations didactiques***. Grenoble La Pensée Sauvage, 115 – 160, 1998.

CATARINO, Paula & MORGADO. M. L. On Generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials. **VERSITA**, v. 24, nº 3, 61 – 78. 2016. Disponivel em: https://pdfs.semanticscholar.org/b5f7/42bc4bb715a82467bb1eb3976c674a19904d.pdf?_ga=2.251677449.1845979340.1503046417-1924977525.1502537199

CERIN. Zvonko. Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers. **Journal of Integer Sequences**. 10, Article 07.2.5, 2007a.

CERIN. Zvonko. Formula for Sums of Jacobsthal-Lucas numbers. **International Mathematical Forum**. v. 2, nº 40, 1969 – 1984, 2007b. Disponivel em: http://www.m-hikari.com/imf-password2007/37-40-2007/cerinIMF37-40-2007.pdf

COOK, Charles K. & Bacon. Michael R. Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations. **Annales Mathematicae et Informaticae**. v. 41, nº 1, 27 – 39. 2013.

DJORDJEVIĆ. Gospava B. Generalized Jacobthal Polynomials. **The Fibonacci Quarterlly**, v. 38, nº 3, 239 – 244. 2000.

DJORDJEVIĆ. Gospava B. & DJORDJEVIĆ. S. Generalized k-jacobsthal and k-jacobsthal-lucas numbers. **Research and Communications in Mathematics and Mathematical Sciences**. v. 6, nº 1, 21 – 36, 2016.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) **Ingenieria Didactica en Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1 – 7, 1995.

EVES, Howard. **An introduction to the History of Mathematics**. Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston, 1969.

FREY, Darrin. & SELLERS. James. Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices. **Journal of Integer Sequences**. v. 3, nº 1, 1 – 15. 2000.

GONDINO, Juan. D. et all. Didactic engineering as design-based research in mathematics education. **CERME**, 2013, p. 1 – 10. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_CERME_2013.pdf>. Acesso em: maio de 2017.

HORADAM. A. F. Jacobsthal representation polynomials, **Fibonacci Quarterlly**. v. 35, nº 1, 137–148, 1996.

HORADAM. A. F. Jacobsthal representation polynomials, **Fibonacci Quarterlly**. v. 35(1997), 137–148, 1997. Disponivel:

JACOBSTHAL, E. Fibonaccische Polynome und Kreisteilungsgleichungen. **Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen.Gesellschaft.** (1919-1920), p. 43-57, 1919 – 1920.

JHALA, D, K. SISODIYA, G. P. S. RATHORE. On Some Identities for k-Jacobstha Numbers. **Int. Journal of Math. Analysis**, v. 7, nº12, p. 551-556, 2013.

JHALA, G. P. S. RATHORE AND K. SISODIYA. Some identities and generating function for the k-Jacobsthal-Lucas sequence. **Advanced Studies in Contemporary** Math. v. 24, nº 4, 475 – 482. 2014.

KOKEN, F. & BOZKURT, D. On the Jacobsthal Numbers by Matrix Methods. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**. nº 3, 605-614, 2008. Disponível: https://pdfs.semanticscholar.org/538a/435e9883c5ee9d663fd2656e180d81927c2c.pdf

MARGOLINAS, Claire. & DRIJVERS, Paul. Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. **ZDM Mathematics Education**. v. 47, nº 6, 893 – 903. October, 2015.

PAULE, Peter & KAUERS, Manuel. (2011). **The Concrete Tetrahedron. Symbolic Sums, Recurrence Equations, Generating Functions, Asymptotic Estimates**. New York: Springer.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (2011). L'ingénierie didactique a` l'interface de la recherche avec l'enseignement. De´veloppement de ressources et formation des enseignants. In: C. Margolinas, et al. (Eds.). **En amont et en aval des inge´nieries didactiques**, 57–78. Grenoble: La pense´e sauvage.

TEMPIER, Fréderick. New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. **Journal of Mathematical Teacher Education.** v. 19, nº 1, 261 – 276. **2016.**

SILVA, Elen. V.; ANDRADE, C.; & SILVA, Kenia. Intepretações Combinatórias para os Números de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas Generalizados via Ladrilhamentos. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**. v. 3, nº 1, 1 – 7, 2015.

UYGUN, Sukran & OWUSU, Evans. A new generalization of jacobsthal numbers (BI-PERIODIC JACOBSTHAL SEQUENCES). **Journal of Mathematical Analisys**. v. 7, nº4, 28 – 39. 2016. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/815d/c51036ad643f722342ec6c76bfa510149b86.pdf

UYGUN, SÜKRAN & USLU, KEMAL. The (s,t) generalizes matrix jacobsthal sequence. In: Anastassiou, George A. & Duman. Oktay. **Computational Analysis. AMAT, Ankara**. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 325 – 337. 2015.

USLU, S; K. UYGUN. The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas Matrix sequences. **ARS Combinatoria**, 108, 13-22, 2013.

UYGUN, S. The (s,t)-Jacobsthal and (s,t)-Jacobsthal Lucas sequences. **Applied Mathematical Sciences**, 70(9), (2015), 3467-3476