

REVISITANDO O LANÇAMENTO OBLÍQUO DE UMA PARTÍCULA

REVISITING THE OBLIQUE LAUNCH OF A PARTICLE

Guilherme F. Marranghello¹, Márcia M. Lucchese², Fábio S. da Rocha³

Recebido: fevereiro/2019 Aprovado: fevereiro/2020

Resumo: Apresentamos um modelo físico baseado em conceitos de mecânica clássica para analisar o movimento de uma pessoa que deseja lançar-se de um balanço em movimento e determinamos quais devem ser as condições de posição angular e altura para que este salto ocorra visando determinar a maior distância horizontal alcançada no lançamento. Como uma aplicação do modelo obtido, sugerimos um experimento para uso em laboratório didático onde se promove um movimento análogo ao do balanço, através de um pêndulo físico, de um eletroímã e de uma esfera metálica. As medidas das grandezas físicas envolvidas na experiência foram feitas através da técnica da vídeo-análise e corroboram as previsões teóricas para a medida do alcance horizontal da esfera ao fim da trajetória, com um desvio inferior a 4,5%.

Palavras-chave: Mecânica, Projétil, Modelagem.

Abstract: We present a physical model based on concepts of classical mechanics to analyze the movement of a person who wishes to launch herself from a moving see-saw and determine what should be the conditions of angular position and height for this jump to achieve the greatest horizontal distance. As an application of the obtained model, we suggest an experiment for use in didactic laboratory where a movement similar to that of the swing is promoted through a physical pendulum, an electromagnet and a metallic sphere. The measurements of the physical quantities involved in the experiment were made through the technique of video analysis and corroborate the theoretical forecasts for measuring the horizontal reach of the sphere at the end of the trajectory, with a deviation of less than 4.5%.

Keywords: Mechanics, Projectile, Modelling.

1. Introdução

A mecânica do movimento real é algo bastante complexo, mas, através de algumas simplificações, podemos descrever inúmeros casos cuja proximidade com a realidade validam os modelos utilizados. Seguidamente usamos equações de queda livre para descrever uma esfera caindo ao solo, pois a resistência do ar pode ser ignorada, desprezamos a massa de um fio, porque a massa da esfera de um pêndulo é muito superior e por aí seguem os inúmeros exemplos. Ao transpor estas simplificações para um curso de física, devemos ficar atentos para não recairmos sempre nos mesmos exemplos que fogem à realidade, como simples caixas que se movem, com ou sem atrito, molas penduradas etc. São muitos os casos que podemos dar um

¹  <https://orcid.org/0000-0001-9156-1847> - Doutor em Física pela UFRGS, 2003. Professor da UNIPAMPA, Bagé, RS, Brasil. Av. Maria Anunciação Gomes de Godoy, 1650, Bairro Malafaia, CEP 96.413-172, Bagé, RS, Brasil. E-mail: gfmarranghello@gmail.com

²  <https://orcid.org/0000-0002-1176-9080> - Doutora em Física pela UFRGS, 2005. Professora da UNIPAMPA, Bagé, RS, Brasil. Av. Maria Anunciação Gomes de Godoy, 1650, Bairro Malafaia, CEP 96.413-172, Bagé, RS, Brasil. E-mail: mmlucchese@gmail.com

³  <https://orcid.org/0000-0002-5240-3579> - Doutor em Física pela UFRGS, 2002. Professor da UFPel – Centro de Integração do Mercosul, Eldorado do Sul, RS, Brasil. Rua Francisca da Silva, 319, Bairro Chácara, 96.010-900, Eldorado do Sul, RS, Brasil. E-mail: fabio.saraiva.rocha@gmail.com

passo além em nossos exemplos, com propostas mais realistas, seja através de raciocínio matemático ou através do uso de tecnologias (ROCHA et al, 2014; LANG; LEVIN, 2004; GUADAGNINI et al, 2011).

Este trabalho apresenta uma análise mecânica sobre o movimento de um projétil acoplado a um pêndulo físico, similar ao movimento de uma pessoa em um balanço. Importante lembrar que o movimento de um projétil lançado obliquamente a partir de um pêndulo físico não é totalmente equivalente ao movimento de uma pessoa em um balanço. Esse tipo de simplificação cabe numa sala de aula com ressalvas feitas pelo professor, se devidamente acompanhado das discussões necessárias sobre a validade dos modelos teóricos frente aos resultados experimentais. Obviamente, o sistema tratado teoricamente aqui é pontual e não de corpo extenso. Como ilustração para uma prática didática experimental neste campo, propomos o seguinte problema: quais as melhores condições físicas para o desacoplamento de um projétil preso a um pêndulo físico quando se deseja alcançar a maior distância horizontal ao final do movimento? Os objetivos de realizar esta prática didática são: o de proporcionar um raciocínio mais complexo do que o simples balançar de um pêndulo ou de um lançamento de projétil através de um canhão e estimular a visão crítica dos educandos frente à relação modelo teórico versus experimentação (VEIT; TEODORO, 2002), (BRANDÃO et al, 2008). A prática proposta oferece um exemplo mais elaborado que aqueles tratados inicialmente em um curso de física, promovendo um encontro entre diversos conteúdos da mecânica clássica e a experimentação através da vídeo-análise (JESUS; SASAKI, 2015), (SÍLVIA; SANABRIA, 2018), (ALLAIN, 2016), (KLEIN et al, 2014). Cabe lembrar que mesmo sendo comum encontrarmos exemplos de saltos de balanço em parques e praças, esta brincadeira é perigosa, arriscada e não deve ser executada, principalmente por crianças.

2.0 lançamento do projétil

É facilmente demonstrado em um curso de cinemática que ao desconsiderarmos a resistência do ar, o movimento de um projétil é descrito pelas equações (TIPLER, 2000):

$$x = x_0 + v_x \cdot t \quad (1)$$

sendo x a posição horizontal em função do tempo t transcorrido desde o lançamento, x_0 a posição horizontal inicial, $v_x = v_0 \cos \theta$ é a componente da velocidade na direção horizontal que, devido à ausência da resistência do ar, se mantém constante igual ao seu valor;

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

onde y é sua posição vertical em função do tempo t , y_0 sua altura no momento do lançamento, v_{0y} sua velocidade inicial na direção y e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, a aceleração da gravidade.

Em um curso de física, utilizamos estas duas equações para demonstrar que o alcance de um projétil, cuja altura final (y) é igual a altura inicial (y_0), é dado por

$$X = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (3)$$

o que determina um maior alcance para o ângulo de 45° . Vamos, aqui, fazer nossa primeira e mais simples consideração: a criança sai de uma determinada altura e chega no chão. Desta

forma, vamos determinar o alcance de um projétil cuja altura final é $y = 0$, mas a altura inicial tem $y_0 > 0$. Desta forma, o alcance é dado por:

$$X = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2 \sin^2 \theta}} \right) \quad (4)$$

Para $y_0 = 0$, retornamos para a equação original, entretanto, para valores diferentes de zero temos uma variável extra no problema. Quanto maior o valor de y_0 , maior o alcance do projétil e menor o ângulo necessário para a obtenção deste alcance. Para valores de v_0^2 numericamente igual a $2g$, variando o valor da altura inicial, obtemos os valores da tabela 1.

Tabela 1: Valores de y_0 (m) e do ângulo θ (rad) para a expressão (4) com $v_0^2=2g$.

y_0 (m)	0	0,1	0,5	1,0
θ (rad)	0,7854	0,7615	0,6846	0,6152

A tabela 1 mostra que quanto maior a altura de lançamento de um projétil, menor será o ângulo necessário para atingir o alcance, entretanto, como veremos na seção seguinte, onde trataremos a questão do balanço como um pêndulo, não apenas a altura da criança depende do ângulo do balanço, mas também a velocidade de lançamento e as posições angulares, inserindo novas variáveis ao problema.

3.0 movimento pendular

Vamos considerar o movimento do balanço como se tivéssemos um pêndulo oscilando. Considerando a figura 1, h corresponde à altura do balanço com relação ao solo, L é o comprimento da corda que prende o balanço e (θ) é o ângulo de salto da pessoa.

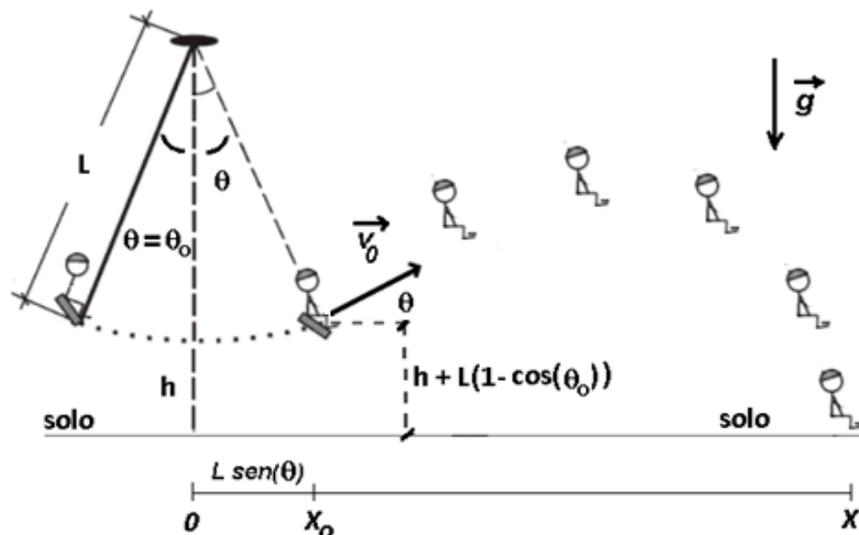


Figura 1 – Movimento pendular do balanço até o ângulo (θ) e o lançamento que se segue com as grandezas iniciais de interesse. Desenho apenas ilustrativo sem compromisso de escala.

Fonte: Autores.

Vamos iniciar esta etapa da análise com as devidas considerações sobre a conservação de energia, afinal de contas, a velocidade de salto da criança será determinada pela energia cinética

que ela ganhou, transformando sua energia potencial gravitacional do início do ciclo de movimento. Vamos considerar θ_0 como o ângulo máximo obtido e, conseqüentemente, a altura da criança com relação ao solo será dada por $h+L(1-\cos\theta_0)$. A equação de conservação de energia (TIPLER, 2000) nos diz que, no caso de não haver força externa ou perdas por atrito (casos idealizados aqui):

$$E_i = E_f \quad (5)$$

$$K_i + E_{gi} = K_f + E_{gf} \quad (6)$$

onde a energia cinética da criança no momento inicial é nula, pois este é o momento de maior altura do balanço, ficando com:

$$mg[h + L(1 - \cos\theta_0)] = \frac{1}{2}mv^2 + mg[h + L(1 - \cos\theta)] \quad (7)$$

Chamaremos $v = v_0$ para manter a nomenclatura da seção anterior, pois esta será a velocidade inicial do salto da criança. Desta forma, a equação para a velocidade do lançamento, como função do ângulo de lançamento fica sendo:

$$v_0 = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad (8)$$

Em (8), se tivermos o valor de zero para o ângulo (θ), a velocidade será a máxima possível para cada ângulo de lançamento (θ_0) dado, o que corresponde ao ponto mais baixo da trajetória. É importante lembrar a relação entre o ângulo de lançamento no pêndulo e a altura de tiro designada na seção sobre o projétil:

$$y_0 = h + L(1 - \cos\theta) \quad (9)$$

Reunindo estas equações, obtemos uma nova equação para o alcance como função do ângulo de lançamento (θ),

$$X = L(\cos\theta - \cos\theta_0) \sin 2\theta \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{h+L(1-\cos\theta)}{L(\cos\theta-\cos\theta_0)\sin^2\theta}} \right] \quad (10)$$

Ainda é necessário fazer uma última consideração para o salto. Este alcance é dado a partir do momento do salto, mas como o balanço estará deslocado da origem no momento do salto, faz-se necessário incluir uma correção com relação à posição horizontal do balanço. Assim, a equação fica:

$$X = x_0 + L(\cos\theta - \cos\theta_0) \sin 2\theta \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{h+L(1-\cos\theta)}{L(\cos\theta-\cos\theta_0)\sin^2\theta}} \right] \quad (11)$$

onde $x_0 = L \sin(\theta)$.

Considerando por exemplo $L = 1,8$ m e $h = 0,80$ m, podemos observar o comportamento do alcance previsto através da expressão (11) na figura 2.

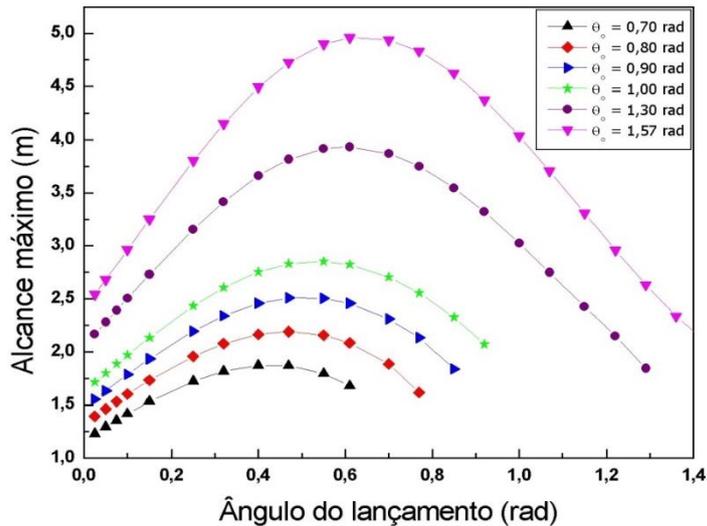


Figura 2 – Alcance previsto através da expressão (11) em função do ângulo de lançamento (θ) e da posição angular inicial do balanço (θ_0). Fonte: Autores.

Na figura 3, podemos ver o comportamento linear do alcance em função do ângulo inicial de soltura do balanço (θ_0), para um ângulo fixo de lançamento escolhido aleatoriamente para ilustrar o comportamento do alcance.

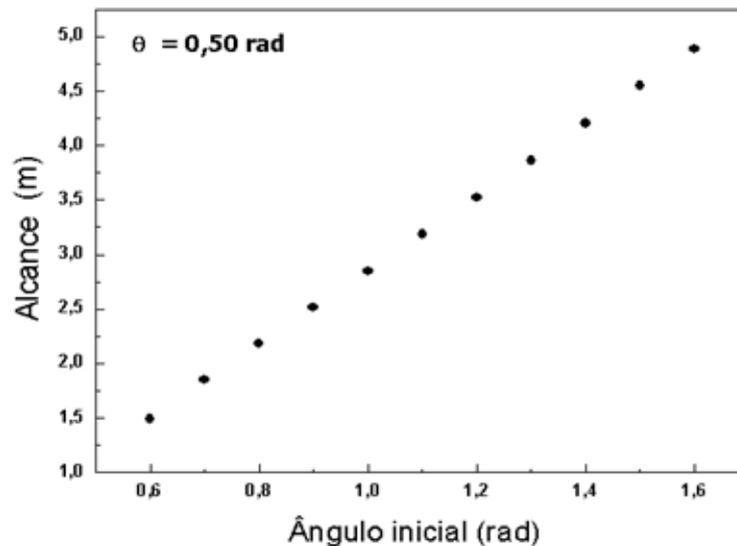


Figura 3 – Alcance previsto através da expressão (11) em função da posição angular inicial do balanço (θ_0) para $\theta = 0,5$ rad. Fonte: Autores.

É possível verificar facilmente, através das figuras 2 e 3, que a posição inicial do balanço vai determinar o alcance da partícula, como diz a intuição de uma criança. Quanto maior for a altura inicial do balanço, maior será a energia potencial gravitacional no momento inicial e, por fim, maior será a energia cinética no momento do lançamento. Um estudante que pretenda resolver o problema de lançamento oblíquo certamente apontará o ângulo de 45° como o melhor ângulo de lançamento, entretanto, o que o problema apresenta, é uma forte relação deste ângulo ótimo para lançamento com a posição inicial do balanço. Ainda, o ângulo de lançamento da criança também determina os valores de x_0 e y_0 , uma vez que o balanço está em

movimento, influenciando no resultado final. Para um tratamento mais detalhado e extenso do problema, indica-se a leitura de (SHIMA, 2012).

4. Experimento de aplicação por vídeo-análise

Apresentamos um exemplo de aplicação do modelo proposto anteriormente através da análise de vídeos de um experimento constituído de um pêndulo e uma pequena esfera metálica presa à haste do pêndulo por um eletroímã energizado. O pêndulo simula o movimento do balanço e a esfera simula a pessoa saltando do balanço.

Um quadro do vídeo analisado pelo uso do programa Tracker se encontra na figura 4. É possível visualizar os eixos coordenados, a trajetória do projétil antes (circular) e após (parabólica) a soltura, uma haste horizontal fixa, o eixo de rotação, o eletroímã na extremidade da haste móvel, uma régua que serve de referencial de tamanho, a esfera e um batente que é fixo na haste horizontal e que serve para posicionar a haste móvel sempre com o mesmo ângulo inicial de lançamento (θ_0). O sistema pêndulo físico é feito de uma haste retangular de alumínio com área da base de $1,0 \text{ cm}^2$ e $40,0 \text{ cm}$ de comprimento (L), medida que corresponde à distância entre o eixo de rotação até a superfície da esfera de aço que possui massa $m = (4,7 \pm 0,1) \text{ g}$ e diâmetro $d = (9,15 \pm 0,01) \text{ mm}$. No ponto mais baixo da trajetória, o centro de massa da esfera está a $14,0 \text{ cm}$ de altura (h), medida do centro da esfera até um raio de esfera de distância da superfície do solo. A haste cilíndrica de aço móvel que sustenta o eletroímã com a esfera e passa pelo eixo de rotação tem $1,0 \text{ m}$ de comprimento e área da base de $1,0 \text{ cm}^2$. Os ângulos seguem a nomenclatura descrita na análise teórica, onde (θ) é o ângulo da haste do pêndulo no momento do lançamento e (θ_0) é o ângulo de abandono da esfera (velocidade nula) no ponto onde ela tem a maior energia gravitacional em toda a sua trajetória presa ao eletroímã. O eletroímã que prende a esfera ao pêndulo foi construído para este experimento e possui um enrolamento de 100 espiras de um fio de cobre esmaltado de $1,0 \text{ mm}$ de diâmetro (fio de sucata de transformador) com um núcleo de ferro de $10,0 \text{ cm}$ de comprimento e $1,0 \text{ cm}$ de diâmetro (parafuso de sucata). A bobina foi alimentada por uma fonte de energia que fornece $9,0 \text{ volts}$ e 1500 mA (também sucata).

O registro do movimento foi feito por uma máquina fotográfica marca Samsung modelo ST65 (ajustada a um tripé) com capacidade de 24 quadros por segundo com $14,2 \text{ megapixel}$. O plano da lente da câmera foi colocado paralelo ao plano do movimento e a distância entre os planos foi de $1,0 \text{ m}$. A análise foi realizada utilizando o software livre Tracker¹. Para maiores detalhes sobre o uso do software, recomendamos a leitura de (WRASSE et al, 2014).

¹ Disponível em: (<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>).

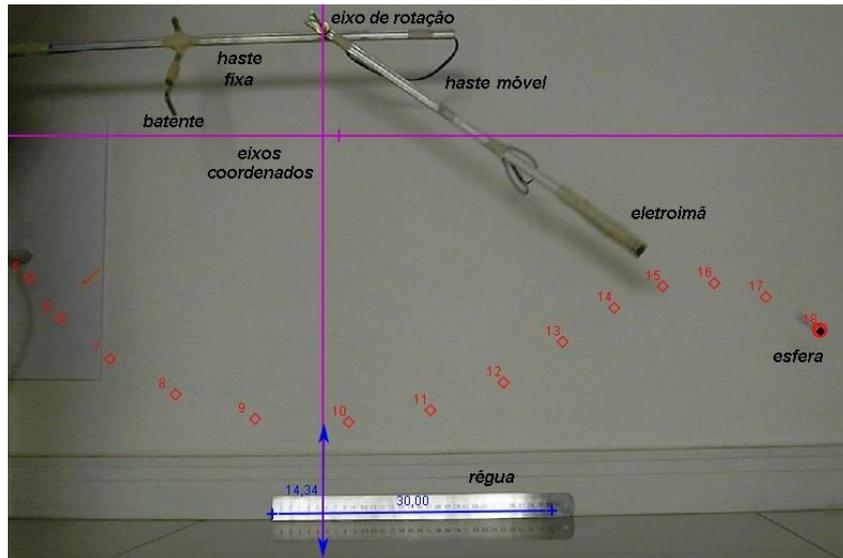


Figura 4 – Quadro do vídeo analisado pelo programa Tracker mostrando os pontos da trajetória do projétil enquanto acoplado ao pêndulo (balanço) e após o salto. O alcance máximo da esfera é função das grandezas L , h e os ângulos θ e θ_0 .

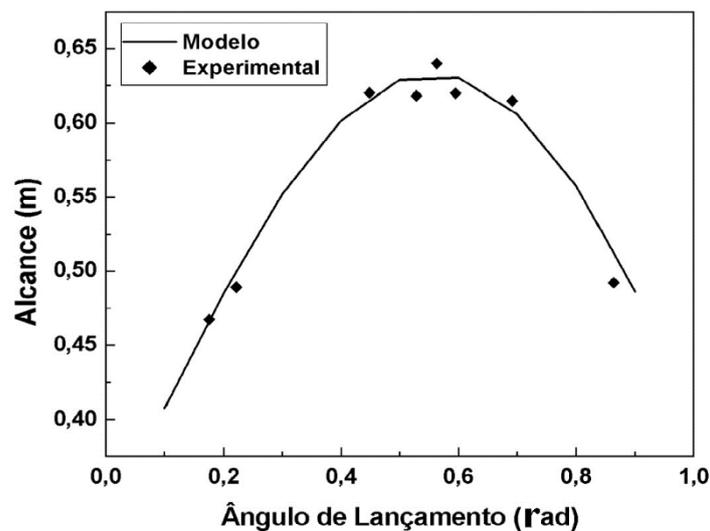


Figura 5 – Valores de alcance encontrados através da técnica de vídeo análise para alguns ângulos de lançamento θ e $\theta_0 = 0,9942$ rad (fixo em todos os oito lançamentos). A linha contínua representa os valores extraídos da expressão (11) do modelo teórico para o mesmo valor $\theta_0 = 0,9942$ rad e θ entre 0,1 e 0,9 rad com passo de 0,1 rad. Fonte: Autores

Para cada lançamento, a esfera foi colocada numa posição angular inicial (θ_0) que conferia ao sistema uma energia potencial gravitacional inicial igual para todos os oito lançamentos analisados aqui. Cada lançamento foi obtido depois da esfera passar pelo ponto mais baixo da trajetória, o experimentador, através de uma chave simples, cortava a corrente no bobinado, proporcionando assim o abandono do corpo em um determinado ângulo inicial da fase de lançamento (θ). Ao seguir sua trajetória “livre” a esfera colidia com o solo no ponto de alcance máximo horizontal. Todo este movimento foi filmado e foram determinadas as grandezas físicas angulares (θ e θ_0) e o alcance X . Uma vez experimentalmente determinadas estas grandezas,

para cada lançamento, por vídeo análise, foi possível utilizar a expressão (11) para o alcance teórico em função de L , h , θ e θ_0 . O comparativo entre o resultado do modelo teórico e os dados experimentais para o alcance em função do ângulo de lançamento (θ) pode ser visto no gráfico da figura 5. O maior desvio encontrado entre o resultado do modelo e o dado medido foi de 4,5% para $\theta = 0,8639$ rad e $\theta_0 = 0,9942$ rad. A figura 5 apresenta os dados obtidos através do experimento comparados com o modelo apresentado neste trabalho.

É importante salientar que o experimento traz uma barra oscilante, o que configura um pêndulo físico com uma importante quantidade de massa na barra, entretanto, ao substituirmos as equações do pêndulo simples pelas equações do pêndulo físico, recaímos na mesma equação para a velocidade de lançamento da esfera. A equação deveria contar com uma energia potencial gravitacional inicial e final (considerando a altura do centro de massa), além da energia de rotação da barra, dada por $K_{\text{Rot}} = 1/2 I \omega^2$, onde o momento de inércia para uma barra é dado por $I = 1/2 mL^2$ e a velocidade da extremidade da barra é dada por $v = \omega L$ ou $\omega = v/L$. Com isso, $K_{\text{Rot}} = 1/4 mv^2$ e:

$$m_1gh_{01} + m_2gh_{02} = m_1gh_1 + m_2gh_2 + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{4}m_2v^2 \quad (12)$$

onde chamamos de m_1 a massa da esfera e m_2 a massa da barra. Sendo ainda h_1 e h_2 , as alturas inicial e final da barra, que, relacionadas com a altura h e a posição da barra, levam à equação:

$$m_1gL(\cos \theta - \cos \theta_0) + m_2g \left\{ \left[h + L(1 - \cos \theta_0) + \frac{L}{2} \cos \theta_0 \right] - \left[h + L(1 - \cos \theta) + \frac{L}{2} \cos \theta \right] \right\} = \left(\frac{2m_1+m_2}{4} \right) v^2 \quad (13)$$

que pode ser reorganizada como:

$$m_1gL(\cos \theta - \cos \theta_0) + m_2g \left\{ \left[-L(\cos \theta_0) + \frac{L}{2} \cos \theta_0 \right] - \left[-L(\cos \theta) + \frac{L}{2} \cos \theta \right] \right\} = \left(\frac{2m_1+m_2}{4} \right) v^2 \quad (14)$$

chegando a:

$$m_1gL(\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{1}{2}m_2gL(\cos \theta - \cos \theta_0) = \left(\frac{2m_1+m_2}{4} \right) v^2 \quad (15)$$

e, por fim, chegamos ao mesmo resultado obtido na equação (8). Este resultado torna-se de grande relevância, pois apresenta-se de forma contrária a uma intuição de que o ângulo de 45° , obtido em um lançamento oblíquo simples será o de maior alcance, inserindo uma variável no problema, relacionada à posição inicial do balanço.

5. Considerações finais

Apresentamos o tratamento matemático envolvido com a descrição física da mecânica de um sistema oscilatório idealizado que pode ser usado como ponto de partida para explicar o movimento real de uma pessoa que depois de estar em movimento em um balanço, resolve pular deste e medir seu próprio alcance horizontal em função das grandezas físicas envolvidas. O sistema físico dado como exemplo e analisado por vídeo mostra que é possível aproximar teorias físicas da mecânica de exemplos encontrados com facilidade no cotidiano. Apresentamos aqui um exemplo mais elaborado que aqueles apresentados em um curso básico de física, mesmo universitário, promovendo um encontro entre diversos conteúdos da mecânica

clássica e as novas tecnologias educacionais, proporcionando um incremento do laboratório didático com relativo baixo custo.

A continuidade deste trabalho deverá conter a aplicação da atividade em sala de aula, avaliando a compreensão dos alunos sobre o sistema e sobre a relação entre o modelo teórico e a experimentação, buscando verificar como os objetivos aqui propostos podem ser atingidos, suas possibilidades e dificuldades, além de propor uma sequência didática onde esta atividade esteja inserida em meio a um conjunto de aulas planejadas em sintonia com estes objetivos.

6. Referências bibliográficas

- Allain, R., **Physics and Video Analysis**. Morgan & Claypool Publishers, (2016).
- Brandão, R. V., Araújo, I. V., Veit, E. A., Modelagem e ensino de física, **Física na Escola**, v. 9, n. 01 (2008).
- Guadagnini, P. H., Rocha, F. S., Barlette, V. E., Projeto de um sensor eletrônico baseado em extensometria para medição de força. **Latin-American Journal of Physics Education**, v. 5, n. 4, p. 753-762, (2011).
- Jesus, V. L. B., Sasaki, D. G. G., O experimento didático do lançamento horizontal de uma esfera: Um estudo por vídeoanálise, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 1, 1507 (2015).
- Klein, P., Gröber, S., Kuhn, J., Müller, A., Video analysis of projectile motion using tablet computers as experimental tools, **Physics Education**, v. 49, p. 37 – 40, (2013).
- Lang, F. S., Levin, Y., Pressão e volume em balões de festa: podemos confiar em nossa intuição? **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. edição especial, p. 143-153, dez. (2004).
- Rocha, F. S., Marranghello, G. F. e Lucchese, M. M., **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**., v. 31, n. 122 1, p. 98-123, abr. (2014).
- Sívia, E. S., Sanabria, N. D., Videoanálise de disparos realizados por uma catapulta caseira: uma proposta de ensino para a discussão de lançamentos oblíquos e avaliação da energia mecânica, **Revista Brasileira de Física e Tecnologia Aplicada**, v. 5, n. 1, p. 14-26, mai./jun. (2018).
- Shima, H., **European Journal of Physics**., 33, p.1687-1693 (2012).
- Tipler, P. A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, Editora, (2000). v. 1. 788p.
- Veit, E, Teodoro, V. D., Modelagem no Ensino/Aprendizagem de Física e os Novos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, Jun, (2002).
- Wrasse, A. C., Etcheverry, L. P., Marranghello, G. F., da Rocha, F. S., Investigando o impulso em crash tests utilizando vídeo-análise. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 1, 1501 (2014).