

UTILIZAÇÃO DE DERIVADAS PARCIAIS EM LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

USE OF DERIVATIVES IN PARTIAL SURVEYING

*Rubia Diana Mantai¹
Maurílio Miguel Tiecker²*

Resumo: A necessidade de descrever o lugar em que se vive trouxe uma nova área de conhecimento, a topografia, a qual tem por objetivo levantar dados que possam representar no papel a configuração de um terreno. Um aparelho utilizado por topógrafos é a Estação Total, o qual faz medidas de ângulos e distâncias. Porém existem alguns erros (do aparelho, do operador, etc) que desfazem a precisão do posicionamento lido, assim para se obter um resultado confiável com uma boa precisão e acurácia torna-se necessário fazer certos ajustamentos nas medidas. A matemática traz suas contribuições a diversas áreas do conhecimento, inclusive para a topografia que se utiliza de inúmeras fórmulas matemáticas, e é através de algumas dessas fórmulas que se desenvolverá este trabalho. Com a utilização de derivadas parciais consegue-se caracterizar e minimizar os erros ocorridos no campo, tornando os dados do levantamento mais exatos e com uma maior confiabilidade no posicionamento. Apresentaram-se no decorrer do trabalho várias aplicações da matemática na topográfica, porém dá-se ênfase nos cálculos onde utiliza-se das derivadas parciais para se mensurar o erro de leituras do levantamento topográfico, sendo que os resultados obtidos foram para a coordenada $x_c = 155.012,019m \pm 0,19m$ e para a coordenada $y_c = 247.113,977m \pm 0,19m$. A determinação e correção do erro trazem importantes contribuições aos que necessitam de posicionamentos de alta precisão, e para os matemáticos fica como incentivo a utilizar a matemática aplicada na geomática como uma forma de aplicar os cálculos diferenciais no ensino.

Palavras-chaves: levantamento topográfico; derivadas parciais; matemática aplicada.

Abstract: The need to describe the place where we live has brought a new area of knowledge, the topography, which aims to gather data that might represent on paper the configuration of land. An instrument used by surveyors is the Total Station, which makes measurements of angles and distances. But there are some errors (the device, operator, etc) that break the positioning accuracy read, so to obtain a reliable result with good precision and accuracy it is necessary to make certain adjustments in the measures. Mathematics brings their contributions to various fields of knowledge, including the topography that makes use of many mathematical formulas, and it is through some of these formulas that will develop this work. With the use of partial derivatives can be characterized and minimize the errors that occurred in the field, making data collection more accurate and with greater reliability in positioning. Presented themselves during the work various applications of mathematics in topography, but there is an emphasis on calculations which utilizes the partial derivatives to measure the error of the survey readings, and the results were to coordinate and coordinate. The determination and correction of the error make important contributions to those who need high accuracy positioning, and for mathematicians is an incentive to use applied mathematics in geomatics as a way of applying the differential calculus in teaching.

Key-words: surveying; partial derivatives; applied mathematics.

¹ Rubia Diana Mantai, bolsista de IC e acadêmica do curso de Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – Campus de Santo Ângelo; rdmantai@yahoo.com.br.

² Maurílio Miguel Tiecker, possui graduação em Matemática pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (1992), graduação em Tecnólogo da Construção Civil Modalidade Estradas pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (1990) e mestrado em Engenharia de Produção pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1997). Atualmente é professor da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões; mmtiecker@urisan.tche.br.

INTRODUÇÃO

Atualmente a interdisciplinaridade tem sido uma palavra-chave para a discussão de trabalhos acadêmicos, pois reúne conhecimentos de várias áreas que se interligam a procura de complementaridade.

Para a educação, Fazenda (2000) considera a interdisciplinaridade não como uma panacéia que garantirá um ensino adequado, ou um saber unificado, mas um ponto de vista que permitirá uma reflexão aprofundada e crítica sobre o funcionamento do ensino.

A matemática está intimamente ligada com diversas áreas, dentre elas a engenharia, a qual se utiliza de inúmeras fórmulas matemáticas para sua aplicação. Dentro da engenharia, temos a topografia a qual tem por objetivo fazer a descrição de uma determinada área através de levantamentos topográficos.

Os levantamentos topográficos são feitos com equipamentos adequados para o mesmo, porém existem alguns fatores que impedem que o resultado encontrado seja o valor real, ou seja, em uma sequência de leituras de medidas haverá sempre uma discordância entre elas, o que chamamos de erro de posicionamento. Esse erro se dá por vários motivos, como a limitação humana, irregularidade do aparelho, instabilidade da natureza, etc. Como há um elevado nível de exigência quanto à precisão dos levantamentos topográficos, devem-se fazer certos ajustes nas medidas encontradas.

Busca-se neste trabalho apresentar algumas aplicações da matemática na topografia, mais especificamente utilizando derivadas parciais a fim de mensurar os erros ocorridos durante o levantamento topográfico, tornado os dados levantados mais exatos e com uma maior confiabilidade no posicionamento.

METODOLOGIA

TOPOGRAFIA X GEODÉSIA

Para estudar a topografia é indispensável citar a Geodésia, pois a topografia é um caso particular da mesma. Conforme Cordini&Parma (2004), a Geodésia é a ciência que se ocupa da determinação da forma, das dimensões e do campo de gravidade da Terra para referência precisa à vários projetos da engenharia, levando em consideração a curvatura da mesma e tentando desenvolver soluções para transformar a superfície do elipsóide em uma superfície plana. Ela se divide em Geodésia Superior, a qual se preocupa em definir o formato e dimensão da Terra, e a Geodésia Elementar ou Geométrica, a qual se preocupa com a Topografia, a fim de proporcionar uma rede de pontos fundamentais para que se possam amarrar os levantamentos topográficos.

Então, como explica Garcia&Piedade (1984), mesmo que a Geodésia e a Topografia utilizam métodos e instrumentos semelhantes, a Geodésia se preocupa com a descrição da forma e o tamanho da terra, enquanto a Topografia trata de pequenas extensões, limitando-se em descrever uma área não maior a 50 km de raio, onde o erro devido a curvatura da Terra está em torno de 1,4 m, valor insignificante pela extensão da área.

Medir, conforme Cordini&Parma (2004), significa comparar o objeto de medida com um padrão. O resultado da medida é indicado através de números em

uma unidade de medida conforme o padrão utilizado. Porém as medidas não permitem obter o valor exato do objeto medido por diversos motivos como a limitação humana, a imperfeição dos aparelhos, os métodos de cálculos utilizados e a variação climática, portanto o valor de uma grandeza normalmente não se resulta com exatidão, então a necessidade de estimativas e aproximações mais prováveis possíveis.

EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL – GPS

Para representar a superfície da Terra são efetuadas medidas de grandezas como direções, distâncias e desníveis. Com a tecnologia do sistema GPS, podemos realizar o levantamento topográfico utilizando este novo equipamento, que além de ter uma boa precisão, é prático e economiza tempo.

Conforme Gorgulho (2004), o sistema GPS – Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global) foi concebido pelo Departamento de Defesa dos EUA no início da década de 1960. O sistema foi declarado totalmente operacional apenas em 1995. Consiste de 24 satélites que orbitam a terra a 20.200 km duas vezes por dia e emitem simultaneamente sinais de rádio codificados. Os satélites enviam seus sinais de rádio exatamente ao mesmo tempo, permitindo ao receptor avaliar o lapso entre emissão/recepção. A hora-padrão GPS é passada para o receptor do usuário. Receptores GPS em qualquer parte do mundo mostrarão a mesma hora, minuto, segundo, até mili-segundo. A hora-padrão é altamente precisa, porque cada satélite tem um relógio atômico, com precisão de nano-segundo – mais preciso que a própria rotação da Terra. É a referência de tempo mais estável e exata jamais desenvolvida.

Alguns fatores que ocasionam os erros e impedem a exatidão das medidas são: a limitação humana, a imperfeição instrumental e a instabilidade da natureza. Um erro de um micro segundo (10^{-6} segundos) no registro do lapso de tempo desde a transmissão até a sua recepção pode resultar num erro de 300 metros.

Atualmente tem muita utilidade em diversas situações, algumas delas são: no monitoramento de abalos sísmicos, na meteorologia, em aplicações industriais, para o uso militar, na aviação geral, IBGE, na navegação marítima, para segurança e para a medição de áreas. Além das várias áreas de emprego, é muito utilizado pelos agrimensores, os quais diminuem custos e obtêm levantamentos topográficos precisos mais rapidamente com o GPS.

ESTAÇÃO TOTAL

Nos últimos anos, a área da topografia sofreu várias modificações e avanços, os teodolitos mecânicos (aparelho que mede ângulos) foram substituídos por teodolitos eletrônicos, e o surgimento dos distanciômetros eletrônicos (aparelho que mede distâncias) foram unidos com o teodolito eletrônico, formando assim as Estações Totais, as quais estão cada vez mais equipadas e sofisticadas.

A grande demanda de realizações de trabalhos topográficos trouxe a necessidade de encontrar métodos de levantamento eficazes, rápidos e precisos. Melhorias nas precisões, agilidade, confiabilidade, mobilidade, medições

automáticas, são alguns dos avanços ocorridos com as Estações Totais, permitindo assim um ganho de produtividade em cada levantamento.

A Estação Total, conforme Silveira (1954) é um instrumento eletrônico usado para medir ângulos e distâncias. Conforme os manuais técnicos destes aparelhos, as Estações Totais de melhor qualidade medem ângulos com precisão de 1", 2", 3", 5" e 7", e possuem uma medição de distância com precisão linear de até 2 mm + 2ppm com alcance de até 2000 m sem utilização de prisma refletor e até 5500 m com prisma refletor. Seu telescópio aumenta 30 vezes com uma distância mínima de foco de 1,3 metros.

Conforme as normas da ABNT sobre a aparelhagem são classificadas segundo os desvios-padrão que as caracterizam, de acordo com a tabela abaixo:

Quadro 1: Precisão do equipamento Estação Total

| Classes de Estações totais | Desvio-padrão Precisão angular | Desvio-padrão Precisão linear |
|----------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1 – precisão baixa | $\leq \pm 30''$ | $\pm (5mm + 10ppm \times D)$ |
| 2 – precisão média | $\leq \pm 07''$ | $\pm (5mm + 5ppm \times D)$ |
| 3 – precisão alta | $\leq \pm 02''$ | $\pm (3mm + 3ppm \times D)$ |

onde D = distância.

REALIZAÇÃO DO LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO

Conforme Comastri&Gripp (1998), levantamento topográfico é o conjunto de operações feitas no campo e no escritório, através de instrumentos adequados e métodos destinados a obter a representação geométrica do terreno em estudo. No campo é feito o levantamento dos pontos e medidas, e no escritório é feito os cálculos dos pontos adquiridos no campo e o desenho que representará o terreno.

Ao iniciar o levantamento deverá primeiramente reconhecer o terreno, isto é, percorrer o território selecionando onde será o ponto de partida e os principais vértices, neles deverá ser usado marcos de madeira de lei ou concreto para materializá-los no terreno. Também deverá determinar o valor da declinação magnética do local, para possibilitar a orientação da planta, e amarrá-lo quando houver acidentes naturais ou artificiais em sua proximidade. Então, para desenvolver o levantamento será preciso organizar os materiais necessários, como estacas, balizas etc, e após, é feito o levantamento propriamente dito, iniciando-se do ponto de partida escolhido anteriormente.

São registrados os dados do levantamento em uma caderneta de campo, e faz-se um croqui do caminho realizado. Devem ser marcados na planta todos os detalhes do terreno, como uma construção, um rio, os nomes dos lindeiros, estradas etc.

As grandezas medidas em um levantamento topográfico podem ser grandezas lineares, as quais são principalmente distâncias horizontais e distâncias verticais ou diferenças de nível; e grandezas angulares, as quais são os ângulos azimutais ou horizontais e ângulos zenitais ou verticais. Ângulos azimutais ou

horizontais são aqueles que se medem como se estivessem projetados em um plano horizontal. Já os ângulos zenitais ou verticais são aqueles que as linhas do horizonte formam com o plano do horizonte.

Dependendo do objetivo do levantamento, o mesmo é feito com métodos diferentes, podem ser classificados em: Expedito, com utilização de instrumentos com baixa precisão como um velocímetro, os passos do homem ou de um animal; Comum, onde se usa instrumentos mais aprimorados como uma fita de aço, trenas, e os métodos de medições são mais rigorosos; e de Precisão, onde se utiliza aparelhos de alta precisão o que torna a medição das distâncias e ângulos bem acurada, designado para os levantamentos geodésicos.

AZIMUTE

Garcia&Piedade diz que azimute, é o ângulo que o alinhamento forma com a direção norte-sul a partir da ponta norte como origem. São contados de 0° a 360° e são chamados azimutes à direita quando contados para a direita do norte (sentido horário) e azimutes à esquerda quando contados para a esquerda do norte (sentido anti-horário). Como demonstrado na figura abaixo:

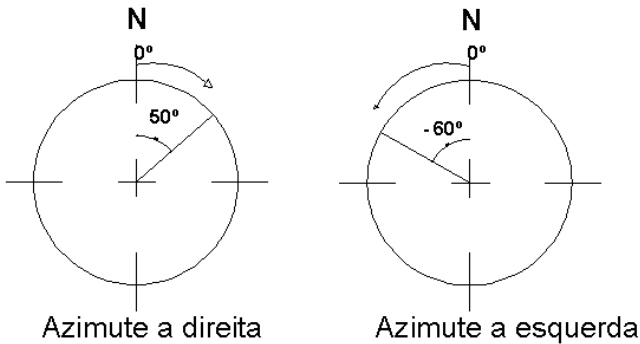


Figura 01: Azimutes

Para a topografia, a origem dos ângulos começa no norte, sob o eixo norte/sul, aumentando suas unidades no sentido horário. Assim os sinais das projeções podem variar diferenciando-se do conceito referente ao plano cartesiano utilizado pelos matemáticos. Para ilustrar esta situação, apresentam-se as figuras abaixo:

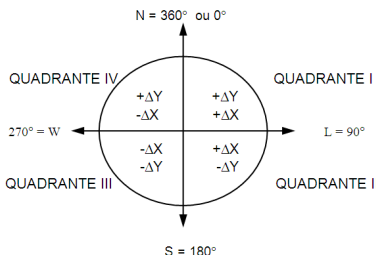


Figura 2: Quadrantes na topografia

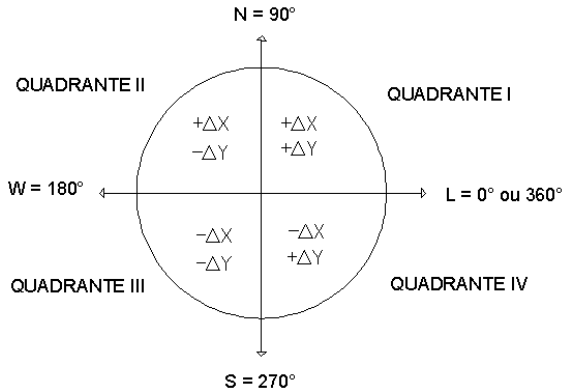
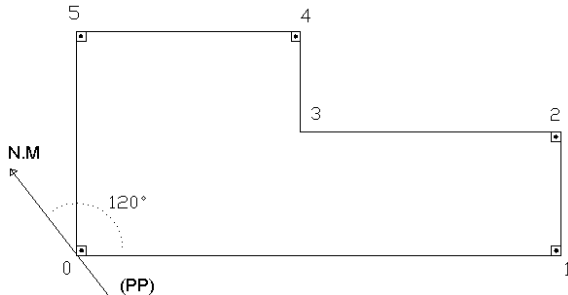


Figura 3: Quadrantes na matemática

CAMINHAMENTO PELOS ÂNGULOS INTERNOS OU EXTERNOS

Comastri&Gripp (1998) nos explica como é feito o levantamento de uma poligonal através do caminhamento pelos ângulos internos ou externos. Primeiramente instala-se a estação total (ou teodolito) no ponto de partida do caminhamento e visa-se a baliza de ré (a qual é a estaca colocada no vértice de fechamento do caminhamento), com o limbo do aparelho zerado. Após mira-se a baliza vante (a qual é a estaca colocada no vértice seguinte do que está no momento) e faz-se a leitura do ângulo interno 5-0-1 e a distância 0-1, anotando-se as leituras na caderneta de campo, em seguida se transfere o aparelho para a estação 1 centralizando-o e zerando as leituras anteriores, visa-se na baliza de ré na estação 0 e mira-se na estação 2, retirando a leitura do ângulo interno 0-1-2 e a medida da distância 1-2, sempre gravando no equipamento, ou, no caso do teodolito, anotando as leituras na caderneta de campo. E assim procede-se até o final da poligonal. Para o caminhamento pelos ângulos externos o procedimento é idêntico ao anterior, porém caminha-se no terreno em sentido contrário, medindo os ângulos externos da poligonal. (Figura 04 e Figura 05)



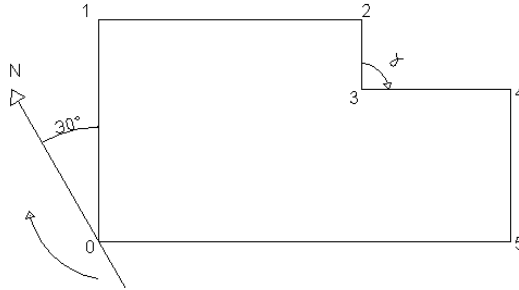


Figura 05: Levantamento pelos ângulos externos

O cálculo do azimute quando se tem somente as coordenadas dos pontos a ser medido é feito através da fórmula:

$$A_{z(2-1)} : \text{Arctg} \left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \right)$$

Onde:

$A_{z(2-1)}$: azimute da linha 1 – 2

E a partir de quando se tem o azimute anterior ao ponto medido, o próximo pode ser calculado através de:

$$Az_n = Az_{n-1} + \alpha_n \pm 180^\circ$$

Onde:

Az_n : azimute da linha a ser medida

Az_{n-1} : azimute da linha anterior

α_n : ângulo interno ou externo da linha

Se $Az_{n-1} + \alpha \text{ interno}_n > 180^\circ$, subtraem-se 180°

Se $Az_{n-1} + \alpha \text{ interno}_n < 180^\circ$, adicionam-se 180°

Isso é necessário, pois caso contrário cada iteração acumularia o azimute da linha anterior.

Já o cálculo da distância PQ se dá pelo teorema de Pitágoras:

$$(d_{PQ})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad \text{Pitágoras} \quad \longrightarrow$$

$$d_{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

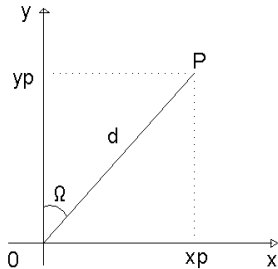
$$d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Figura 06: Demonstração da distância PQ

CÁLCULO DAS COORDENADAS

Para realizar o desenho do levantamento topográfico e determinar o erro linear de fechamento devem-se calcular as coordenadas das projeções das leituras feitas em campo.

Assim têm-se o cálculo de uma projeção:



Ponto P:

$$\text{Projeção } xp : \Delta_{xp} = d \cdot \text{sen}Az_n$$

$$\text{Projeção } yp : \Delta_{yp} = d \cdot \text{cos}Az_n$$

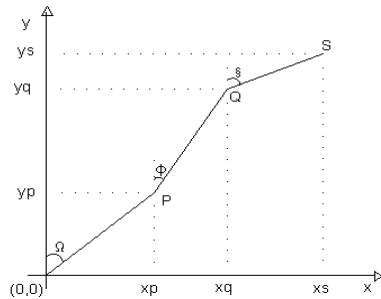
Sendo:

d = distância

Az_n = azimute da linha = Ω

Figura 07: Demonstração da projeção do ponto P

Com as projeções calculadas se consegue transformá-las em coordenadas e então se realiza o desenho da poligonal levantada:



$$Q = \left\{ \begin{array}{l} x_q = x_p + d_{pq} \cdot \text{sen}Az_{n-1} \\ y_q = y_p + d_{pq} \cdot \text{cos}Az_{n-1} \end{array} \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x_s = x_q + d_{qs} \cdot \text{sen}Az_{n-1} \\ y_s = y_q + d_{qs} \cdot \text{cos}Az_{n-1} \end{array} \right\}$$

Figura 08: Demonstração de projeções

A expressão mostra que é possível determinar as coordenadas de um ponto a partir de outro, medindo a distância entre eles e o azimute do alinhamento.

AJUSTAMENTO DE ERROS

ERROS EM LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Conforme Leandro (2005), uma medição topográfica só poderá ter valores aproximados das grandezas do ângulo e do comprimento, pois se cometem erros inevitáveis nas operações realizadas, devido à imperfeição dos instrumentos e dos nossos sentidos.

Cada vez que uma medida for realizada, deve ser organizada, avaliada e interpretada. Cada vez que uma medição se realiza, erros se cometem, com a simples exceção de uma contagem discreta de elementos. (CORDINI&PARMA, 2004).

Como nenhuma medida está livre de erros devem-se seguir certos passos para minimizá-los ao máximo, com precisão e acurácia necessária para suprir a exigência dos trabalhos topográficos.

Ao realizar uma medição o principal objetivo é que se consiga uma medida exata, que alcance o valor verdadeiro. Porém este objetivo na prática é inalcançável, pois depois de uma série de medidas só consegue-se chegar a um valor que mais se aproxime da medida real, mas não a medida exata.

Como diz Cordini&Parma (2004) dentro da área da engenharia existem vários fenômenos que não têm soluções exatas, estes se conseguem demonstrar apenas através de modelos matemáticos, e nestes casos os métodos numéricos ajudam a encontrar os valores aproximados do real.

As observações topográficas como fala Leandro (2005), são afetadas por erros, que podem ser classificados em três elementos:

Erros Grosseiros: causados por engano na medição, leitura errada nos instrumentos, identificação de alvo, etc.

Erros Sistemáticos: são aqueles que podem ser corrigidos através da aplicação de fórmulas matemáticas e físicas.

Erros Acidentais: são erros que não seguem nenhum tipo de lei e ora ocorrem num sentido e ora noutro.

Ao trabalhar em levantamentos topográficos necessita-se de dados que tenham precisão e acurácia, para que os resultados de nossa medição tenham sentido.

A acurácia expressa o grau de aderência das observações em relação ao seu valor verdadeiro. E a precisão está ligada a repetibilidade de medidas sucessivas feitas em condições semelhantes. A figura abaixo demonstra estes conceitos:

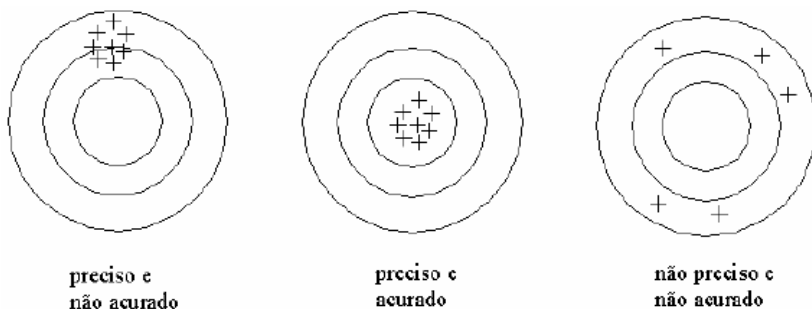


Figura 09: Tipos de posicionamento

COMPENSAÇÃO DO ERRO ANGULAR DE FECHAMENTO

Caso o erro angular de fechamento estiver dentro do nível de tolerância aceitável, pode-se fazer uma compensação do erro, sendo que esta compensação poderá ser positiva quando o erro for para menos, e negativa quando o erro for para mais.

A equação para calcular a propagação do erro angular (azimute) de um ponto para outro se dá pelo cálculo da derivada parcial seguinte:

$$\sigma^2_{Az(n)} = \left(\frac{d_{Az(n)}}{d_{Az(n-1)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(n-1)} + \left(\frac{d_{Az(n)}}{d\alpha_n} \right)^2 \cdot \sigma^2_{\alpha_n}$$

Onde:

n: ponto a ser calculado

$Az(n)$: azimute do ponto n

$Az(n - 1)$: azimute do ponto anterior ao n

α_n : ângulo interno/externo do ponto n

ERRO LINEAR DE FECHAMENTO

Após ser calculado as coordenadas dos vértices do polígono topográfico, consegue-se determinar o erro linear de fechamento. Caso a região levantada seja uma poligonal fechada, a soma algébrica das abscissas positivas deve ser igual a soma das abscissas negativas, e o mesmo caso para as ordenadas (COMASTRI&GRIPP,1998).

Os erros de x e y são distribuídos proporcionalmente ao número de coordenadas e somados às abscissas/ordenadas positivas e subtraídos das abscissas/ordenadas negativas.

Para a poligonal aberta, o cálculo da propagação do erro linear é dado por:

$$\sigma^2_{x_n} = \left(\frac{d_{x_n}}{d_{x_{n-1}}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{x_{n-1}} + \left(\frac{d_{x_n}}{d_{d((n-1)-n)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{d((n-1)-n)} + \left(\frac{d_{x_n}}{d_{Az(n-1)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(n-1)}$$

$$\sigma^2_{y_n} = \left(\frac{d_{y_n}}{d_{y_{n-1}}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{y_{n-1}} + \left(\frac{d_{y_n}}{d_{d((n-1)-n)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{d((n-1)-n)} + \left(\frac{d_{y_n}}{d_{Az(n-1)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(n-1)}$$

Onde:

$\frac{d_{x_n}}{d_{x_{n-1}}}$

$d_{x_{n-1}}$: derivada do ponto em relação ao ponto anterior

$\sigma^2_{x_{n-1}}$: erro do ponto anterior

$\frac{d_{x_n}}{d_{d((n-1)-n)}}$: derivada do ponto em relação à distância

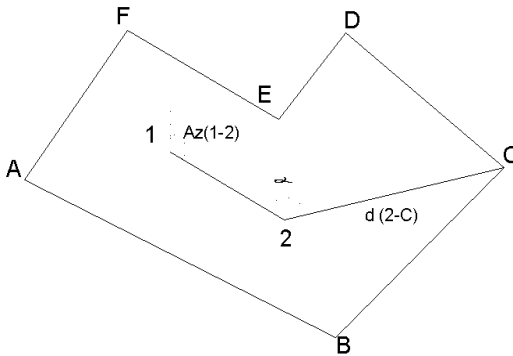
$\sigma^2_{d((n-1)-n)}$: erro da distância

$\frac{d_{x_n}}{d_{Az(n-1)}}$: derivada do ponto em relação ao azimute do ponto anterior

$\sigma^2_{Az(n-1)}$: erro do azimute do ponto anterior

APLICAÇÃO DE CÁLCULOS

Um ponto de divisa foi irradiado através de uma Estação Total, conforme a ilustração e seus dados de campo:



- $A_{z(1-2)} = 99^{\circ}33'40'' \pm 6''$
- $x_2 = 155.003932m \pm 0,19m$
- $y_2 = 247.010321m \pm 0,17m$
- $\alpha = 85^{\circ}12'30'' \pm 12''$
- $d_{(2-C)} = 103,971m \pm 0,08m$

Figura 12: Levantamento com Estação Total

Nos valores acima foram feitas as repetições de medidas e calculados seus desvios padrão. Pede-se a coordenada do ponto x_C e y_C com seus erros, ou seja:

$x_C \pm \sigma_{x_C}$ e $y_C \pm \sigma_{y_C}$

Resolução:

1º passo) Calcular o azimute (2-C) através da fórmula:

$$Az_{(2-C)} = Az_{(1-2)} + \alpha \pm 180^{\circ}$$

Então têm-se:

$$Az_{(2-C)} = 99^{\circ}33'40'' + 85^{\circ}12'30'' - 180^{\circ}$$

$$Az_{(2-C)} = 184^{\circ}46'10'' - 180^{\circ}$$

$$Az_{(2-C)} = 4^{\circ}46'10''$$

2º passo) Calcular a propagação do erro do azimute através da derivada parcial:

$$\sigma^2_{Az(2-C)} = \left(\frac{d_{Az(2-C)}}{d_{Az(1-2)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(1-2)} + \left(\frac{d_{Az(2-C)}}{d\alpha} \right)^2 \cdot \sigma^2\alpha$$

Cálculo auxiliar:

$$\left(\frac{d_{Az(2-C)}}{d_{Az(1-2)}} \right) = 1$$

$$\left(\frac{d_{Az(2-C)}}{d\alpha} \right) = 1$$

Assim:

$$\sigma^2_{Az(2-C)} = \left(\frac{d_{Az(2-C)}}{d_{Az(1-2)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(1-2)} + \left(\frac{d_{Az(2-C)}}{d\alpha} \right)^2 \cdot \sigma^2\alpha$$

$$\sigma^2_{Az(2-C)} = (1)^2 \cdot 6^2 + (1)^2 \cdot 12^2$$

$$\sigma_{Az(2-C)} = \pm 13,4''$$

Então conseguiu-se encontrar o azimute do ponto 2-C com seu erro:

$$Az_{(2-C)} = 4^\circ 46' 10'' \pm 13,4''$$

3º passo) Calcular as coordenadas, através das fórmulas abaixo:

$$x_C = x_2 + d_{(2-C)} \cdot \text{sen}(Az_{2-C})$$

$$y_C = y_2 + d_{(2-C)} \cdot \text{cos}(Az_{2-C})$$

Assim:

$$x_C = x_2 + d_{(2-C)} \cdot \text{sen}(Az_{2-C})$$

$$x_C = 155.003,932 + 103,971 \cdot \text{sen}(4^\circ 46' 10'')$$

$$x_C = 155.003,932 + 103,971 \cdot \text{sen}(4,76944)$$

$$x_C = 155.003,932 + 8,6449$$

$$x_C = 155.012,577m$$

$$y_C = y_2 + d_{(2-C)} \cdot \text{cos}(Az_{2-C})$$

$$y_C = 247.010,321 + 103,971 \cdot \text{cos}(4^\circ 46' 10'')$$

$$y_C = 247.010,321 + 103,971 \cdot \text{cos}(4,76944)$$

$$y_C = 247.010,321 + 103,611$$

$$y_C = 247.113,932m$$

Com os cálculos acima foi possível determinar as coordenadas do ponto C, são elas:

$$x_C = 155.012,577m$$

$$y_C = 247.113,932m$$

4º passo) Calcular o erro da coordenada (x_C, y_C) utilizando a derivada parcial:

$$x_C = x_2 + d_{(2-C)} \cdot \text{sen}(Az_{2-C}) \Rightarrow 155.003,932 + 103,971 \cdot \text{sen}(4^\circ 46' 10'')$$

$$\sigma^2_{x_C} = \left(\frac{d_{x_C}}{d_{x_2}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{x_2} + \left(\frac{d_{x_C}}{d_{d(2-C)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{d(2-C)} + \left(\frac{d_{x_C}}{d_{Az(2-C)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(2-C)}$$

$$\left(\frac{d_{x_C}}{d_{x_2}} \right) = 1$$

$$\left(\frac{d_{x_C}}{d_{d(2-C)}} \right) = 1 \cdot \text{sen}(Az_{(2-C)}) = 1 \cdot \text{sen}(4^\circ 46' 10'') = 0,08315$$

$$\left(\frac{d_{x_C}}{d_{Az(2-C)}} \right) = d_{(2-C)} \cdot \cos(Az_{(2-C)}) = 103971 \cdot \cos(4^\circ 46' 10'') = 103611$$

$$\sigma^2_{x_C} = \left(\frac{d_{x_C}}{d_{x_2}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{x_2} + \left(\frac{d_{x_C}}{d_{d(2-C)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{d(2-C)} + \left(\frac{d_{x_C}}{d_{Az(2-C)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(2-C)}$$

$$\sigma^2_{x_C} = (1)^2 \cdot (0,19)^2 + (0,08315)^2 \cdot (0,08)^2 + (103611)^2 \cdot (0^\circ 00' 13,4'')^2$$

$$\sigma^2_{x_C} = 0,0361 + 4,425 \times 10^{-5} + 4,531 \times 10^{-5}$$

$$\sigma^2_{x_C} = 0,03619$$

$$\sigma_{x_C} = 0,1902m$$

$$y_C = y_2 + d_{(2-C)} \cdot \cos(Az_{2-C}) \Rightarrow 247.010,321 + 103971 \cdot \cos(4^\circ 46' 10'')$$

$$\sigma^2_{y_C} = \left(\frac{d_{y_C}}{d_{y_2}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{y_2} + \left(\frac{d_{y_C}}{d_{d(2-C)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{d(2-C)} + \left(\frac{d_{y_C}}{d_{Az(2-C)}} \right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(2-C)}$$

$$\left(\frac{d_{y_C}}{d_{y_2}} \right) = 1$$

$$\left(\frac{d_{yC}}{d_{d(2-C)}}\right) = 1 \cdot \cos(A_{z(2-C)}) = 1 \cdot \cos(4^\circ 46' 10'') = 0,99654$$

$$\left(\frac{d_{yC}}{d_{Az(2-C)}}\right) = d_{(2-C)} \cdot \cos(A_{z(2-C)}) = 103971 \cdot (-sen)(4^\circ 46' 10'') = -8,6448$$

$$\sigma^2_{yC} = \left(\frac{d_{yC}}{d_{y2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{y2} + \left(\frac{d_{yC}}{d_{d(2-C)}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{d(2-C)} + \left(\frac{d_{yC}}{d_{Az(2-C)}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{Az(2-C)}$$

$$\sigma^2_{yC} = (1)^2 \cdot (0,17)^2 + (0,99654)^2 \cdot (0,08)^2 + (-8,6448)^2 \cdot (0^\circ 00' 13,4'')^2$$

$$\sigma^2_{yC} = 0,0289 + 6,35579 \times 10^{-3} + 3,15 \times 10^{-7}$$

$$\sigma^2_{yC} = 0,0289 + 6,36127 \times 10^{-3} + 0,000315 \times 10^{-3}$$

$$\sigma^2_{yC} = 0,0356$$

$$\sigma_{yC} = 0,1878m$$

Então pelos cálculos efetuados as coordenadas procuradas com seus erros são:

$$x_c = 155.012,019m \pm 0,19m$$

$$y_c = 247.113,977m \pm 0,19m$$

RESULTADOS

Através deste trabalho pode-se perceber uma das aplicabilidades da matemática em meio a tantas que a mesma possui. Neste estudo, demonstrou-se a aplicabilidade de derivadas parciais para a mensuração de erros em levantamentos topográficos.

Vários autores trazem que o ensino da matemática deve ser trabalhado interdisciplinarmente e através de dados práticos e reais, com situações problemas que levam a reflexão, planejamento e a tomada de decisões. Então, conseguiu-se aqui demonstrar a interdisciplinaridade da matemática com a Geodésia, trazendo alguns exemplos de onde ela é utilizada, servindo assim, como incentivo aos professores a utilizarem estas áreas de conhecimento juntas para apresentação de derivadas parciais a alunos da graduação, e aos profissionais agrimensores como um exemplo de cálculo manual de levantamentos topográficos.

A matemática é uma grande aliada à Geodésia através de seus processos numéricos, desde o procedimento de levantamento de dados no campo até o desenho final da planta.

Na aplicação da matemática apresentada, do levantamento topográfico realizado aqui apresentado, o mesmo obteve uma boa precisão, não sendo necessária a execução de um novo levantamento em campo.

Pede-se para calcular a coordenada desconhecida a partir de um ponto anterior, o erro angular encontrado foi de $\pm 13,4''$ e o erro posicional foi de $\pm 0,19m$ tanto para a coordenada x como para y. Em relação aos pontos anteriores, a coordenada x estava com erro de $\pm 0,19m$, sendo assim a propagação não sofreu muitas mudanças, já a coordenada y estava com erro de $\pm 0,17m$ a qual se propagou com uma diferença de $\pm 0,02m$ de um ponto para outro.

Os cálculos efetuados pelos agrimensores são realizados através de softwares topográficos, porém é de extrema importância que o profissional saiba os cálculos aqui realizados, para que assim consiga detectar uma possível falha computacional ou de operação.

Deseja-se segundo Piaget (2002) que o professor deixe de ser aquele que só transmite o conhecimento, mas seja aquele que incentive a pesquisa, o espírito de descoberta e a investigação.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR-13133. Rio de Janeiro: Copyright, 1994.

CORDINI, Jucelei; PARMA, Gabriel Cremona. **Teoria dos erros de observação**. UFSC, set./2004.

FAZENDA, I. **Didática e interdisciplinaridade**. 4.ed. São Paulo: Papirus, 2000.

GARCIA, Gilberto J.; PIEDADE, Gertrudes C. R.. **Topografia: aplicada às ciências agrárias**. 5.ed. São Paulo: Nobel, 1984.

GORGULHO, M. F. G.P.S. **O sistema de posicionamento global**. Revista e ampliada em set./2004. <http://www.gpstm.com/articles.php?lang=port&article=12>

LEANDRO, Rodrigo Figueiredo. Os erros na topografia. In: ERBA D. A. (Org). **Topografia para estudantes de arquitetura, engenharia e geologia**. São Leopoldo: Unisinos, 2005.

LUFT, Celso Pedro. **Minidicionário Luft**. São Paulo: Ática, 2000.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** Tradução de Ivette Braga. 16.ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 2002.

SILVEIRA, Álvaro Astolfo da. **Topografia**. 5.ed. Edições Melhoramentos: São Paulo, 1954.

SILVEIRA, Gustavo Cruz da. Integração GNSS e estação total (TPS). **Revista InfoGNSS Geomática**, 22.ed., ano.4, jan./fev./2008.