EXPLORAÇÃO DIDÁTICA NO ENSINO DE SÉRIES: O CASO DOS *SOFTWARES GEOGEBRA* E O *CAS MAPLE*

DIDACTIC EXPLORATION IN THE TEACHING OF THE SERIES: THE GEOBRA AND CAS MAPLE SOFTWARES CASE

Francisco Regis Vieira Alves*
Instituto Federal de Educação e Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA - UFC

Resumo: Para o entendimento da noção de série infinita, requer-se, de modo padrão, o estudo de outras noções. Dentre elas, destacam-se a noção de sequência de números reais e a noção de convergência. Não obstante, o ensino, quer seja ele no contexto do Cálculo ou de Análise Real, que desconsidera as potencialidades da tecnologia, restringe toda atividade do aprendiz ao domínio do raciocínio lógico-dedutivo. O caráter de injunção refere-se ao fato de que priorizamos esta forma de raciocínio, em detrimento de um entendimento primeiro, tácito, informal, pouco sistematizado, costumeiramente chamado de intuitivo. Ante a este cenário, neste trabalho, assumimos como objetivo, a descrição de situações envolvendo o ensino deste objeto, com arrimo na tecnologia. Demarcamos, de modo inicial, algumas situações estreitamente vinculadas com o tratamento e domínio do conceito de série infinita, em seu contexto histórico. Doravante, indicam-se situações específicas em que se podem destacar as potencialidades do *software Geogebra* e do *Software de Computação Algébrica – CAS Maple*. Mostram-se, também, problemas descritos em termos dos aspectos geométricos e numéricos com o arrimo desses. Por fim, com origem em etapas de pesquisa, sistematizadas em uma análise documental, os elementos acrescidos neste escrito ao estudo de séries, graças à tecnologia, detêm a possibilidade de sugerir a criação de cenários diversificados para seu ensino no *locus* acadêmico.

Palavras-chave: Séries Infinitas, Ensino, *Software*, Visualização.

Abstract: To understanding the notion of infinite series, it is required, in the standard way, the study of the others notions. Among these is the notion of sequence of real numbers and the notion of the convergence. Nevertheless, the teaching whether it in the context of the Calculus or Real Analysis, which disregards the potential of the technology, restricts all activities of the learner to the field of logical-deductive reasoning. The character here refers to the fact this form of reasoning prioritized at the expense of an understanding first, tacit, informal, little systematic, usually called intuitive. Faced with this scenario, in this paper, we assume the objective, the description of situations involving the teaching of this subject, with help of the technology. We established so early, some situations closely associated with the treatment and control of the concept infinite series, in its historical context. Henceforth, we indicate specific situations in which they can highlight the potential ot the *software Geogebra* and the *Algebraic Computation Software – CAS Maple*. Shown is also described problems in terms of number and geometrical aspects with the retaining these. Finally, originating in the steps of the systematic research in the documentary analysis, the elements added to the study of this

* *sregis@isce.edu.br*

writing in the context of the series´ study, have the potential to suggest creating scenarios for teaching in diverse academic locus.
Keywords: Infinite Series, Teaching, Software, Visualization.

1. Introdução

Quando imaginamos efetuar a operação de soma, sucessivamente, “sem que essa operação termine após um número finito de parcela somas” (ÁVILA, 2007, p. 148), mobilizamos um raciocínio matemático peculiar, exigido no entendimento do conceito de séries infinitas que, de modo *standard*, se denota, matematicamente, por $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ (*), onde $a_n \in IR$. O termo a_n é chamado de termo geral da série indicada em (*).

Registramos ideias heurísticas interessantes e recorrentes, que permitem um entendimento intuitivo da referida noção. Neste sentido, Ávila (2007, p. 148-154) comenta o comportamento das expressões $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots+\cdots$ e $1+1/2+1/3+1/4+1/5+\cdots+\cdots$. Com base num argumento pouco formal, Ávila (2007, p. 149) pondera, em relação à primeira, que “fica claro então que a soma da série infinita deve ser 1, de sorte que podemos escrever: $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots+\cdots=1$.” Por outro lado, após desenvolver uma comparação de termos do tipo 2^n, conclui que $\sum_{n\geq 0}^{\infty} 1/n = \infty$.

Com um viés semelhante ao de Ávila, Caraça (1951) desenvolve uma discussão distinguida sobre a descoberta, descrição matemática e uma “aparelhagem de ataque”, parafraseando este autor, que permita dominar a mencionada noção. O conceito, segundo Caraça (1951, p. 259) é o de convergência. Mas antes passarmos a discutir no próximo segmento, algumas formalidades exigidas no estudo da noção de séries infinitas, vale sublinhar alguns argumentos intuitivos indicados pelo autor português.

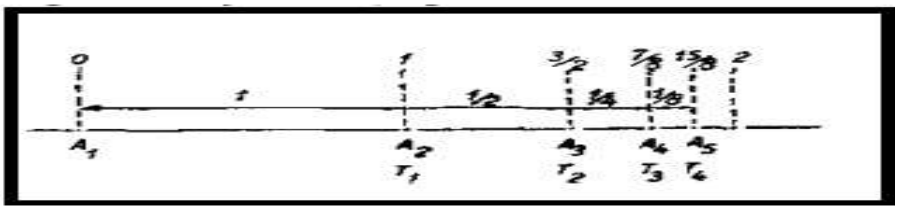

Figura 1. Argumento heurístico relacionado com a convergência, discutido em Caraça (1951, p. 255).

Neste sentido, na figura 1, divisamos a interpretação geométrica do que retrata a operação de passagem ao limite, que incorre no encontro dos móveis indicados no argumento de Zenão de Elea. Caraça (1951, p. 256) escreve: $S_n = [1-(1/2)^{n-1}]/(1-1/2) = 2-(1/2^{n-2})$. Com origem nesta expressão, o autor afirma que “assim, os dois móveis encontram-se à distância de 2 do ponto de partida A, resultado que a experiência confirma. Fomos deste modo, conduzidos a considerar a seguinte entidade analítica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$.”.

Caraça (1951, p. 257-258) exibe ainda a seguinte expressão $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+$. Multiplica a mesma por 2, segue que: $2S=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\ldots$. . Doravante, o autor imprime a seguinte disposição $2S=(2-1)-\frac{1}{2}\frac{1}{2}+(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})-\frac{1}{4}+(\frac{2}{5}-\frac{1}{5})-\frac{1}{6}+(\frac{2}{7}-\frac{1}{7})-\cdots=S \therefore 2S=S$. Por fim, conclui que $2=1$. Diante do caráter inesperado deste resultado, o autor **(A)** desenvolve um diálogo com o leitor **(L)**: **(A)** O resultado é manifestamente absurdo, não é verdade? Ora, quais são as causas do erro em todo o raciocínio que fizemos? **(L)** Só vejo três possíveis, ou a igualdade inicial nada define e S não existe; ou $S=0$ e a passagem de $2S=S$ para $2=1$ é ilegítima; ou a aplicação da adição não é legítima.

Parafraseando Caraça (1951), estes e outros exemplos nos fazem abrirem-se alçapões aos nossos pés. E, em grande parte, tais confusões são originadas ao lidarmos com ideias intrínsecas ao infinito que, embora descoberto pelos gregos, não fora dominado pelos mesmos. No mesmo contexto de discussão, o autor constata o problema da divergência, que exigiu séculos para ser compreendido e dominado pelos matemáticos.

A demonstração de que a série harmônica diverge, feita pela primeira vez por Oresme, mostra como é decisivo o papel do raciocínio lógico para estabelecer uma verdade que jamais seria descoberta de outra maneira. De fato, como vimos acima, mesmo somando os termos da série durante um século (se isso fosse possível) não chegaríamos a um resultado que nos desse qualquer indício de que a série seria divergente. (ÁVILA, 2007, p. 154).

Ainda no contexto de discussão de problemas relacionados com a divergência de séries, Bagni (2002, p. 82) comenta que em 1703, o matemático Guido Grandi, manifestou interesse pela seguinte expressão $S=1-1+1-1+1-\cdots+1-\cdots$. Com base nas argumentações de Grandi, podemos associar os termos acima do seguinte modo: $S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots+1-\cdots$ ou $S=1-(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$, ou ainda, $S=1-[1-1+1-1+\cdots-1+\cdots]$. No primeiro caso, obtemos $S=0$. No segundo caso $S=1$, enquanto que $S=1-S \therefore S=1/2$. Apesar de envolver um argumento falacioso, esta soma era admitida, por muitos matemáticos do século XVII, assumir o valor $1/2$. Não obstante, para concluir esta seção, vale recordar que algumas das propriedades que indicamos aqui foram objetos de fascínio e atenção por parte de filósofos e matemáticos, como patenteamos o registro em Edwards (1979, p. 91). No próximo segmento, discutiremos o papel (e a limitação) dos critérios, em Matemática, que buscam a previsão sobre o comportamento de convergência de uma série. Doravante, assinalamos nosso objetivo de colocar em discussão o significado do comportamento de séries, a partir do uso dos *softwares Geogebra* e do *CAS Maple*.

2. Metodologia e procedimentos

Inicialmente foi realizada uma leitura de documentos que permitiu um primeiro contato com o tema deste artigo. Foi possível nesta fase da *pré-análise* compreender o uso dos *softwares Geogebra* e o *CAS Maple*, como ferramentas que podem ser utilizadas num ambiente de sala de aula, num contexto que valoriza a visualização. Em seguida, partimos para a escolha do material a ser utilizado em nossa análise, que no nosso caso se deu a partir do objetivo almejado. Nesta fase da pré-análise, Bardin (1977, p.96) sugere que depois que o universo de documentos é demarcado, deve-se considerar a constituição de um *corpus* que ele define como sendo "o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos". Bardin (1977, p. 97). Ele explica ainda que para a constituição do *corpus* devem ser consideradas as seguintes regras: *regra da exaustividade*; *regra da representatividade*; *regra da homogeneidade*, e por fim, a *regra da pertinência*.

Regra da exaustividade: consideramos os vários textos que abordavam os *softwares Geogebra* e o *CAS Maple* como ferramentas auxiliares para o ensino de Séries; bem como os textos que faziam menção às aplicações deste *software* na Análise Real.

Regra da representatividade: de acordo com esta regra podemos realizar a análise a partir uma amostra do material se este se prestar a essa possibilidade. Em nosso estudo, demos mais atenção ao material referente ao uso dos *softwares Geogebra* e o *CAS Maple* (de modo complementar) em Análise Real e Cálculo mantendo nosso foco nas aplicações que possibilitam explorar a visualização.

Regra da homogeneidade: Em nosso estudo, os documentos submetidos para a análise obedecem também a esta regra que recomenda a escolha a partir de critérios precisos e que não apresentem singularidade fora destes critérios. Em outras palavras, os documentos por nós retidos giram em torno dos *softwares Geogebra* e o *CAS Maple* como ferramentas auxiliares no ensino de Cálculo e Análise.

Regra da pertinência: Bardin (1977, p. 98) evidencia que esta última regra nos permite considerar os documentos que equivalem ao objetivo que suscita a análise. No próximo segmento, evidenciaremos critérios que permitem prever o comportamento de séries de números reais.

3. Sobre a noção de séries

Nos livros didáticos de Cálculo e de Análise, deparamos uma profusão de critérios que permitem afirmar ou infirmar o comportamento de convergência de séries infinitas. Neste trabalho, nos deteremos em situações discutidas no âmbito de aplicação em Análise Real. Deste modo, uma profusão de critérios que decidem a convergência de séries infinitas pode ser encontrada, a saber: Critério de Cauchy para séries, Teste da condensação de Cauchy, Teste da razão, Teorema de Abel, Teorema de Dirichlet, Teorema de Leibniz, Critério de Raabe, Critério da Comparação, Teste da Integral, Teste de Kummer, Teste de Gauss, Método de Césaro, etc.

Um aspecto relevante, do que concerne ao caráter operacional de uma investigação que aspira dominar e determinar o valor de convergência para determinada série $\sum a_n$, diz respeito à identificação (escolha) de um critério adequado para um caso específico admitido. Vale comentar, por exemplo, que, no rol de critérios e teoremas apontados há pouco, na maioria dos casos, logramos êxito na indicação de convergência ou divergência. Entretanto, como no caso das seguintes séries $\sum_{n=1}^{\infty}[n^2(3+2\cdot(-1)^n)/3^{n+(-1)^n}]$, $\sum_{n=1}^{\infty} n/3^n(5+sen(n\pi/2))$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\left(5n+(-1)^n\right)^2$ ou ainda $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{7n+2\cdot(-1)^n}$, que encontramos em Bourchtein, Bourchtein, Nonberg & Venzke (2011), evidenciamos o caráter limitado destes critérios e dos teoremas indicados na literatura (BRESSOUD; 1994; LIMA, 2006; 2010; EDWARDS, 1979; GUIDORIZZI, 1991; KRANTZ, 2004; THOMSON; BRUCKNER & BRUCKNER, 2001).

E, mesmo num caso particular, quando podemos no valer deste conjunto de critérios e teoremas, a investigação pode proporcionar o fracasso em alguns casos, até que determinemos, em fim, um critério decisório. Neste sentido, Guidorizzi (1991, p. 99) considera uma série $\sum a_n$, cujo termo geral é descrito por $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$. Aqui, aplicando o Critério da Razão, deparamos com a expressão $\lim_{n\to+\infty} (a_n+1)/a_n = \lim_{n\to+\infty} (2n+1)^2/(2n+2)(2n+3) = 1$ o que não nos permite afirmar ou infirmar nada.

Dando prosseguimento ao raciocínio, Guidorizzi (1991, p. 99) emprega o Critério de Raabe, ao escrever a seguinte expressão $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6} = \frac{3}{2} > 1$. Tendo em vista que este critério nem sempre está presente em alguns livros de Análise e de Cálculo, trazemos, então, seu enunciado.

Teorema (Critério de Raabe): Seja uma série de termos positivos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e suponha que exista finito ou infinito o limite $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$. Temos:

(a) $L>1$ ou $L=+\infty$ então $\sum_{n-0}^{+\infty} a_n$ é convergente; (b) $L<1$ ou $L=-\infty$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente; (c) $L=1$ o critério nada revela.

A demonstração deste critério pode ser encontrada em Guidorizzi (1991, p. 97-98). Por exemplo, no caso da série $\sum_{n\geq 2}^{\infty} 1/n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))$, nada se pode concluir, por intermédio da aplicação do seguinte critério fornecido por Guidorizzi (1991, p. 99): seja uma série de termos positivos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e suponha que exista finito ou infinito o limite $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\ln(n)[1-n/(n-1)\cdot(\mathrm{a}_n+1)/a_n = L$. Nesta descrição, podemos escrever um intrincado limite $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\ln(n)\left(1-n/(n-1)\cdot(n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n)))/(n+1)\cdot\ln(n+1)\cdot\ln(\ln(n+1))\right) = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\ln(n)\left(1-n^2\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))/(n^2-1)\cdot\ln(n+1).\ln(\ln(N+1))\right)$.

A presença nem sempre registrada do Critério de Raabe nos compêndios, pode ser comparada com outro critério sempre abordado, chamado de Critério de Leibniz que, conforme Hairer & Wanner (2008, p. 189-190), data de 1682. Veja figura 2.

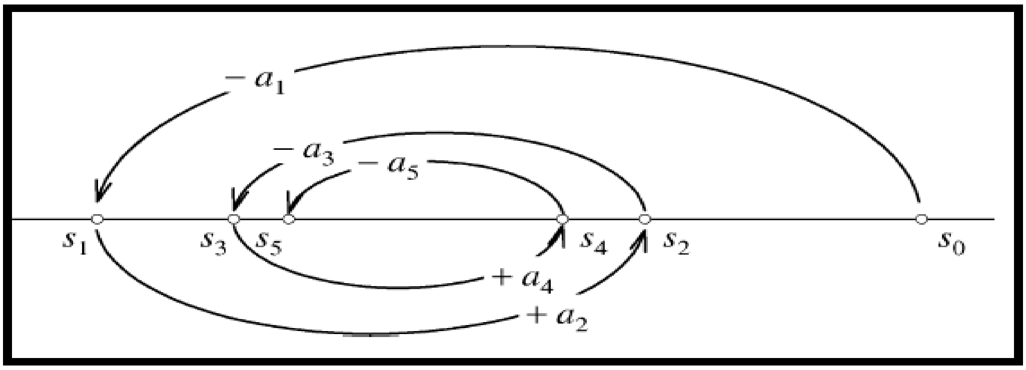

Figura 2. Descrição heurística do comportamento de uma série alternada segundo Hairer & Wanner (2008, p. 190).

De modo similar ao que observamos em Lima (2006, p. 40), os autores Hairer & Wanner (2008, p. 189-190) indicam as seguintes relações intrincadas entre as reduzidas da série alternada $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i \cdot a_i$, do seguinte modo: $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$ (ver fig. 2). Consideremos, pois, a seguinte série $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots = \sum_{i\geq 1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{\sqrt{i}}$ foi objeto de investigação por parte de Cauchy, em 1821, como indicam Hairer & Wanner (2008, p. 197).

Pelo Critério de Leibniz, se conclui que esta série converge, entretanto, não conseguimos precisar seu valor, sem o aparato computacional. Neste sentido, antecipando o que iremos discutir nas seções subseqüentes, obtemos de imediato que $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{(x+1)}\Big/\sqrt{n} = -0.3951013566$, enquanto no caso da série harmônica, se tem $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = N$. O valor de convergência das séries alternadas $\sum_{n\geq 2}^{\infty}(-1)^{n+1}1/n$ ou $\sum_{n\geq 2}(-1)^{n}1/n$ são obtidos com facilidade, indicados pelo *CAS Maple*, por: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} = \ln(2)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n)}}{n} = -\ln(2)$.

Outrossim, no que concerne às séries $\sum_{n\geq 2}^{\infty} 1/n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))$ e $\sum_{n\geq 2}^{\infty} 1/n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))^2$, Guidorizzi (1991, p. 102), afirma, sem muito detalhamento, que a primeira diverge, e a outra converge. Fato que pode ser comprovado com o apoio computacional. Na próxima seção, colocaremos em evidência determinadas propriedades geométricas que podem tornar-se didaticamente viáveis no que concerne a sua exploração em sala de aula, a partir do uso de outro *software*, chamado *Geogebra*. Neste sentido, quando consideramos a série $\sum_{n\geq 1}^{\infty} sen(n)/n$, identificamos seu termo geral por $a_n = sen(n)/n$, definido para $n \geq 0$. Com este *software*, podemos exibir o efeito geométrico que apresentamos na figura 3 abaixo.

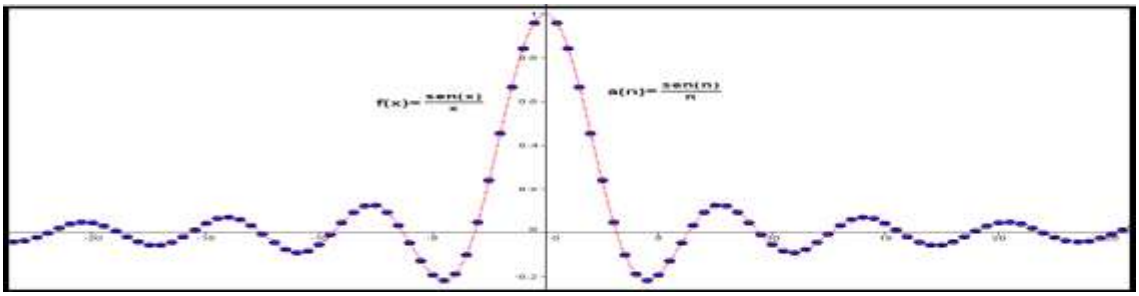

Figura 3. Descrição de uma sequência $a(n)$ e $f(x)$ definida em IR

Uma confusão recorrente nos alunos refere-se ao fato de que, eles nem sempre atentam para o fato de que o termo geral a_n de uma série é necessariamente uma sequência que corresponde a restrição de uma função em IN. Além do cuidado que devemos ter em relação a um domínio restrito aos naturais (lado direito do gráfico da fig. 3), a tecnologia proporciona a visualização de propriedades interessantes. Apresentaremos, em seguida, alguns exemplos no sentido de demarcar esta diferença.

4. A noção de séries e o uso do software geogebra

As vantagens do uso deste *software* se tornam evidentes quando observamos os gráficos abaixo. Na figura 4, divisamos um comportamento assintótico e a presença de uma assíntota horizontal aos pontos da sequência de números reais descrita por $x_n = [6n^2+5n] / [4n^2+10n+6]$. Empregando termos específicos do âmbito da *Análise Real*, depreendemos sua monotonicidade e limitada superiormente pelo valor $L = 3/2$, podemos denotar por $\lim_n \sup(x_n) \le 3/2$. Reparemos que há gráfico, do lado esquerdo da reta orientada (Ox), todavia, consideramos apenas uma sequência definida em $IN \xrightarrow{x_n} IR$, que representa a restrição de uma função em IR (ver gráfico tracejado em rosa).

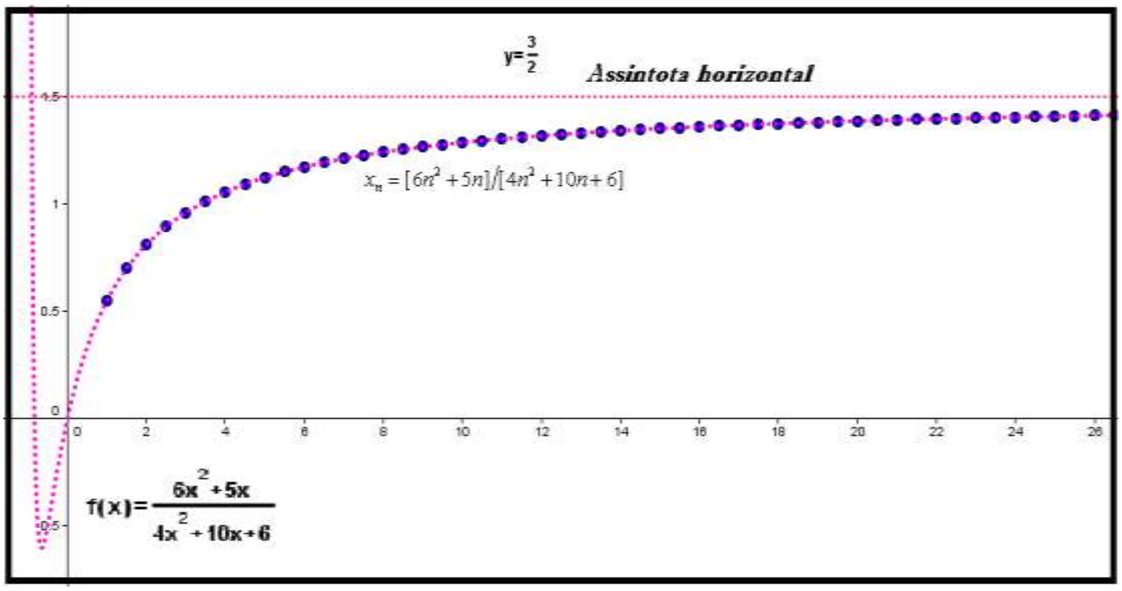

Figura 4. Comportamento de convergência de sequência (elaboração do autor)

Outro exemplo instigante é o caso da série $\sum_{n\ge1}^{\infty} [sen(n^2)+3\cos(n)] / n^2$, cujo termo geral é descrito por $a_n = [sen(n^2)=3\cos(n)] / n^2$. Vale comentar quem, neste caso, a mesma é restrição de uma função $g: IR^+ - \{0\} \to IR$, dada pela expressão $g(x) = [sen(x^2)+3\cos(x)] / x^2$, como divisamos (fig 4). Mas isto nem sempre acontece!

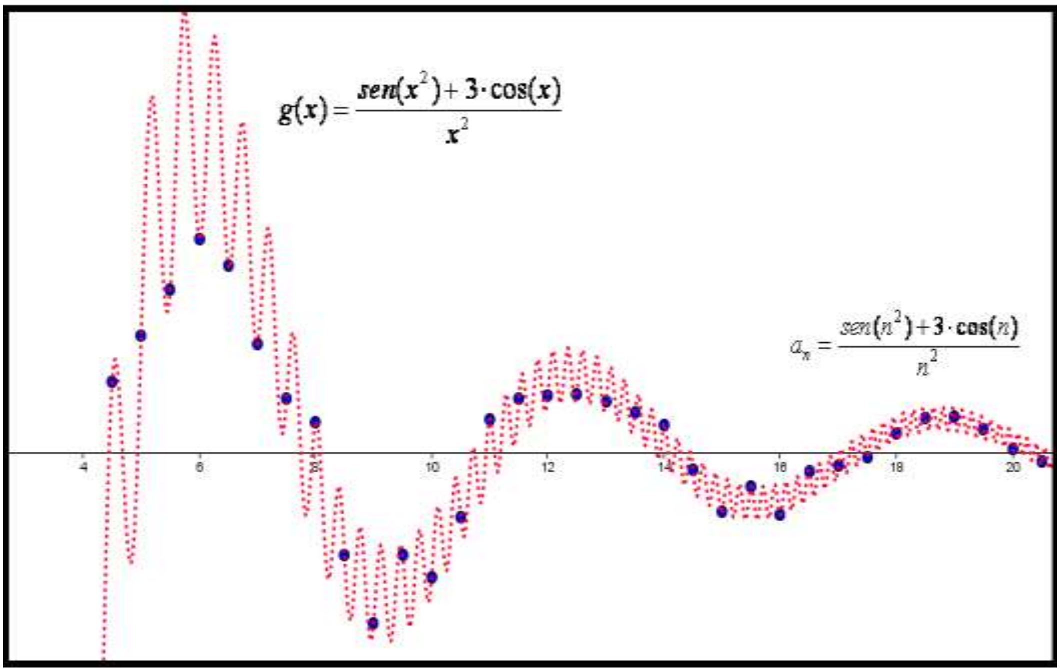

Figura 5. Descrição do comportamento do termo geral a_n de uma série (elaboração do autor)

Diferentemente da figura 4, na figura 5 não temos nenhuma assíntota ao gráfico. Outrossim, o eixo das abscissas é intersectado uma infinidade de vezes pelo gráfico de a_n. Por outro lado, a sequência $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n/n+1$, vem esclarecer as palavras de Lima (2010, p. 134) quando realça que "toda sequência (x_n) de números reais pode ser considerada como a sequência das reduzidas de uma série.". Por outro lado, nem toda sequência de reduzidas descreve uma sequência, vista como a restrição de uma função, definida

em IR. Na figura 6, ao se considerar a série $\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \cdot n/(n+1)$, todas as suas reduzidas são obtidas a partir de seu termo geral a_n, todavia, apenas para cada restrição, indicadas por $(a_n)_{n=par}$ e $(a_n)_{n=ímpar}$, contamos com duas funções, definidas $IN \overset{a_{2n}}{\to} IR$ ou $IN \overset{a_{2n+1}}{\to} IR$. Com o recurso computacional, podemos visualizar o comportamento das funções relacionadas a esse caso, por $f_1(x) = (-1)^{x+1} \cdot (x/(x+1))$ e $f_2(x) = (-1)^{x+1} \cdot (x/(x+1))$, com as condições $f_1 : IR^+ \longrightarrow IR$ e $f_2 : IR_*^- \longrightarrow IR$.

Bartle & Ssherbet (2000, p. 89-90) alertam que, em termos matemáticos, os termos "sequências" e "séries" são coisas distintas. Neste sentido, eles recordam que "uma série é uma sequência $(s_n)_{n\in IN}$ obtida de uma sequência $(x_n)_{n\in IN}$ de acordo com um procedimento dado por $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.". *A posteriori* identificamos seu termo geral a_n, o qual representa uma função (figura 6), quando ampliamos seu domínio ao campo dos números reais, respeitando suas restrições $(a_n)_{n=par}$ e $(a_n)_{n=ímpar}$.

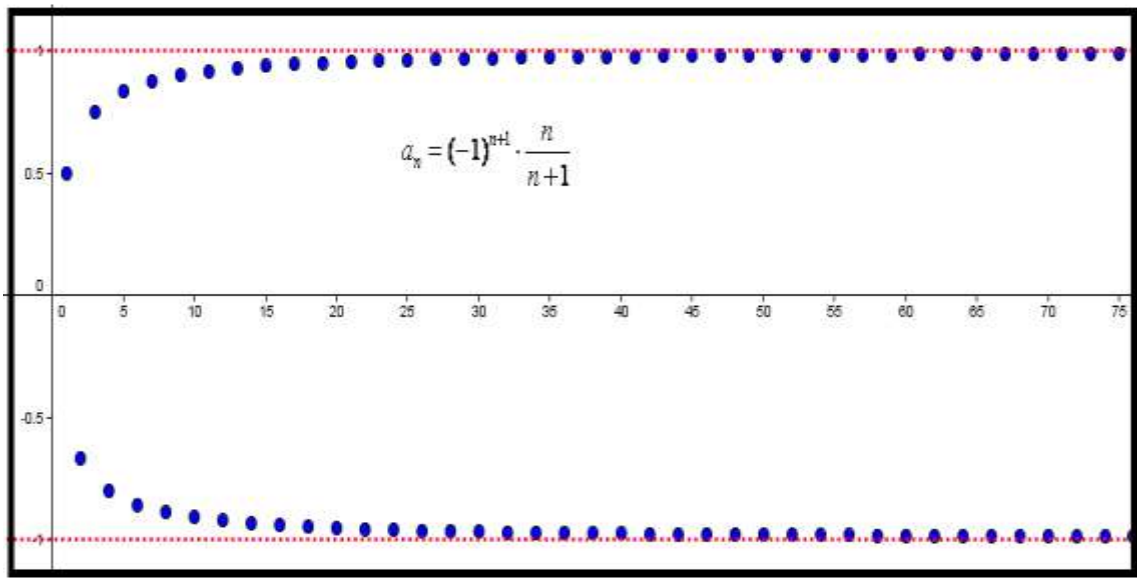

Figura 6. Descrição gráfica do termo geral a_n *de uma série que não representa uma função (elaboração do autor)*

Alguns exemplos interessantes podem ser explorados com o *software Geogebra*. Com tal expediente, se podem compreender alguns valores indicados por Trench (2003, p. 209). Neste sentido, considerando $\sum b_n = \sum_n (1/(p+q))$ e $\sum a_n = \sum (2+sen(n \cdot \pi/6))/((n+1)^p \cdot (n-1)^q)$. O critério indicado por Trench (2003) envolve auferirmos o comportamento da expressão $(a_n/b_n) = (2+\sin(n\pi/6))/((1+1/n)^p (1-1/n)^q)$. Na figura abaixo, registramos todas as variações possíveis para $0<p+q<1$ e $p+q>1$. Não obstante, para afirma ou infirmar algo sobre o comportamento das séries infinitas indicadas há pouco, o autor indica que $\limsup\limits_{n \to +\infty} (a_n/b_n) = 3$ e $\liminf\limits_{n \to +\infty} (a_n/b_n) = 1$. Abaixo, divisamos a descrição de uma oscilação na sequência de pontos. Ademais, depreendemos o decrescimento paulatino da amplitude da oscilação (para $x \to +\infty$). As retas $y=1$ e $y=3$, para valores suficientemente grandes de $n \in IN$, se tornam valores que limitam os valores assumidos pelo quociente a_n/b_n. Vamos relacionar as figuras 7 e 8.

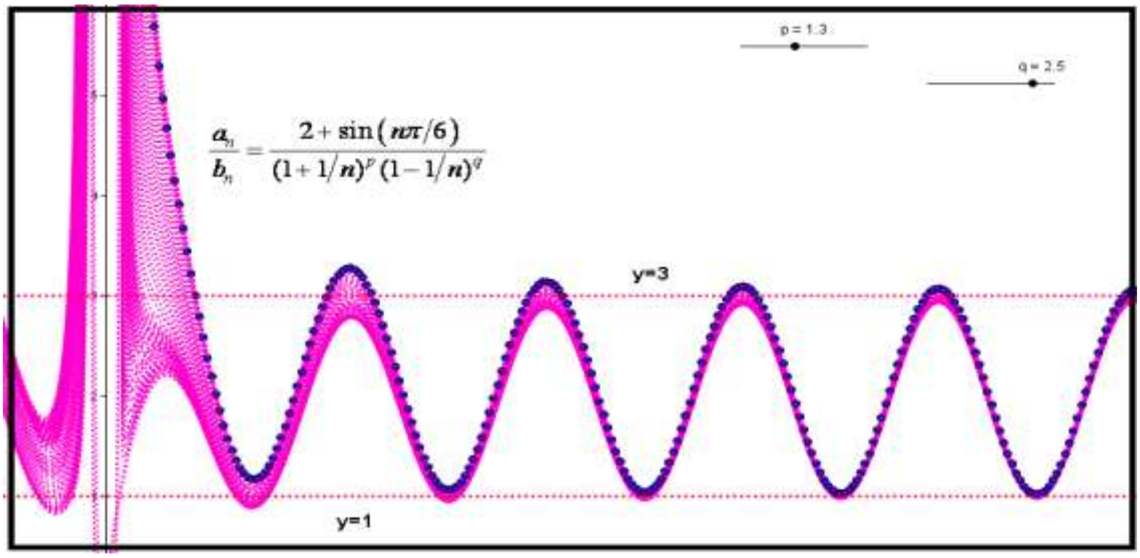

Figura 7. Descrição qualitativa do limite do quociente para variações de p+q.

Na figura 8, compreendemos que $n \geq 500$, as retas $y=1$ e $y=3$ devem limitar a região aonde temos o gráfico. Apesar de que o comportamento oscilatório, indicando que $\limsup_{n\to+\infty}(a_n/b_n) \neq \liminf_{n\to+\infty}(a_n/b_n)$, ou seja, não existe o limite. Mas tal condição de existência não é exigida no critério de convergência proposto por Trench (2003, p. 209). Vale acrescentar a descrição de Lima (2010, p. 122) quando define a entidades $\liminf(x_n)$ e $\limsup(x_n)$ de uma sequência limitada. O primeiro como o "menor valor de aderência de uma sequência", enquanto o segundo como "o maior valor de aderência de uma sequência". Ora, para n suficientemente grande, tais condições são realizadas justamente para os valores $y=1$ e $y=3$, respectivamente. Com o *software*, podemos desenvolver situações de experimentação em sala de aula, para os parâmetros $0<p+q<1$ e $p+q>1$, situação inexeqüível no contexto de uso restrito lápis/papel.

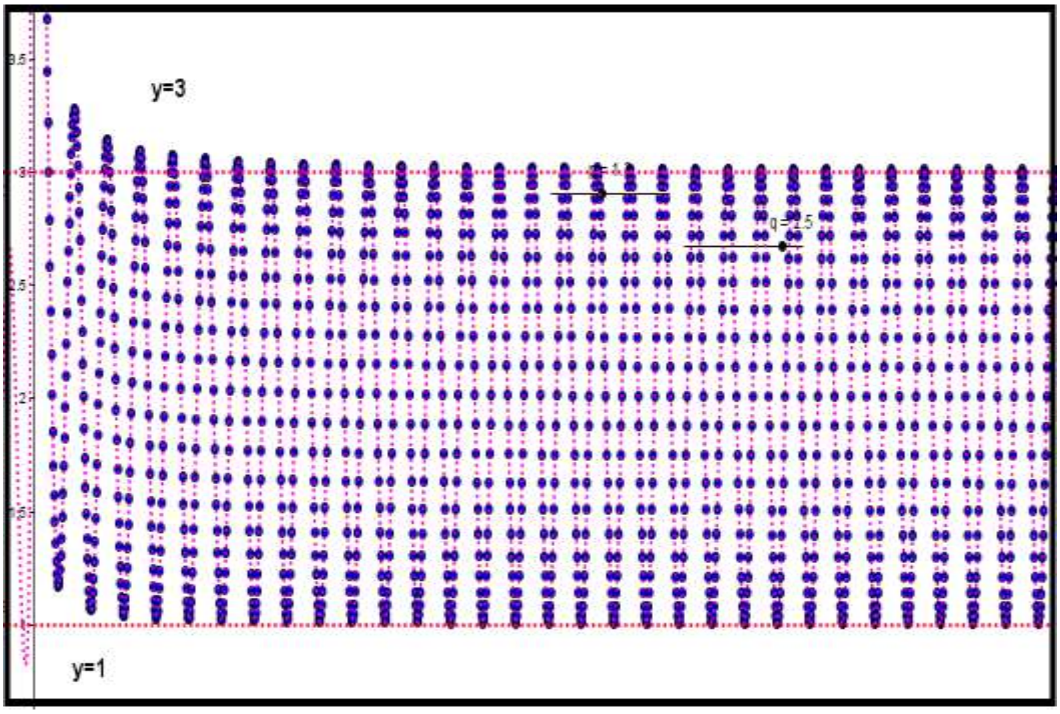

Figura 8. Descrição do comportamento do limite de uma razão entre termos gerais. (elaboração do autor)

Outra situação em que evidenciamos as potencialidades do *software Geogebra* diz respeito a identificamos de propriedades geométricas quando buscamos empregar o Critério da Comparação. De fato, tomando a série $\sum_{n\geq 1}^{\infty} 1\big/(n^3+n^2+n+1)$ o procedimento algébrico padrão que encontramos em livros de Cálculo, sugere encontrar outra série $\sum_{n\geq 1}^{\infty} b_n$ de maneira que seus termos gerais apresentem uma relação do tipo $a_n \leq b_n$, a partir de certo índice. Neste caso, a indicação é considerar $\sum_{n\geq 1}^{\infty} 1\big/(n^2+n)$.

Observemos, com base no gráfico abaixo, que podemos depreender que $a_n \leq b_n$, $\forall n \in IN$.

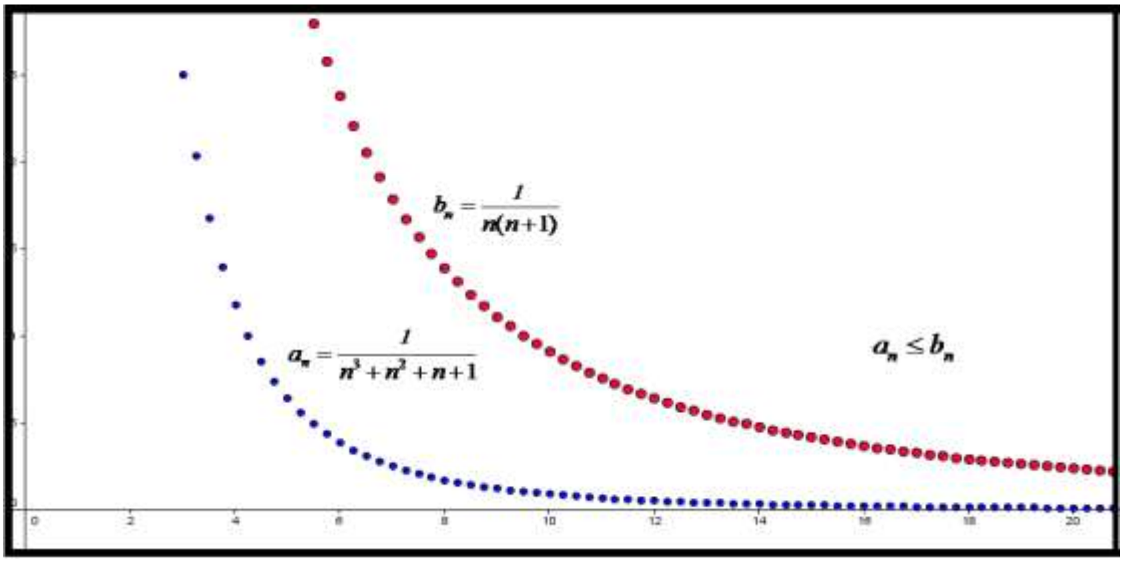

Figura 9. Interpretação geométrica do Critério da Comparação (elaboração do autor)

Em outros casos, a verificação analítica da monotonicidade ou da comparação entre os termos gerais de suas séries pode ser tornar uma tarefa complexa. Neste sentido, que outra série podemos empregar para afirmar ou infirmar a convergência de $\sum_{n\geq1}^{\infty}(n+1)\big/\sqrt[3]{n^7+n}$? Na próxima seção, apresentaremos resultados numéricos obtidos com o programa que permitem uma análise qualitativa do comportamento de uma série.

5. A noção de séries e o uso CAS Maple

Vamos considerar as seguintes séries: $\sum_{n\geq1}^{\infty}1/n$, $\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^{n+1}[n/(n+1)]$ e $\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^{n+1}1/[\ln(n+1)]$. O valor heurístico (no sentido de Polya (1954)) e pedagógico da primeira é apontador por vários autores (ÁVILA, 2007; p. 153-154). O comportamento de divergência da série harmônica é largamente discutido. Outrossim, com o auxílio computacional, fornecemos a tabela 1, indicando os valores numéricos assumidos por reduzidas da série harmônica. Com o acréscimo de repetidos valores, podemos compreender a descrição qualitativa declarada por Lima (2011), quando se refere ao lento crescimento da mesma.

Tabela 1: Comportamento das reduzidas da série harmônica divergente

S_{20}	S_{100}	S_{1000}	S_{10000}	S_{100000}	$S_{1000000}$
3.597739657	5.187377518	7.485470861	9.787606036	12.09014612	14.39272672

Fonte: Elaboração própria

No que concerne a série alternada $\sum_{n\geq1}^{\infty}(-1)^{n+1}[n/(n+1)]$, dispomos do seguinte comportamento exibido na tabela 2. Isto é, suas reduzidas de ordem par manifestam o seguinte comportamento $s_{2n}\leq0$ e $\lim_{n\to\infty}s_{2n}=-\infty$. Enquanto que suas reduzidas de ordem ímpar manifestam o seguinte comportamento $s_{2n+1} \geq 0$ e $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = +\infty$ (ver tabela 3). Tal caráter numérico se apresenta intrinsecamente vinculado ao seu comportamento de divergência, basta conferir isto na figura 6, pois seu termo geral não converge para zero.

Tabela 2: Descrição de algumas das reduzidas de ordem par

S_{10}	S_{20}	S_{30}	S_{50}	S_{100}	S_{200}
-0.2634559885	-0.2836095492	-0.2909837978	-0.2971449963	-0.3019268306	-0.3043714451
S_{300}	S_{400}	S_{500}	S_{1000}	S_{10000}	S_{100000}
-0.3051944492	-0.3056074914	-0.3058558115	-0.3063535684	-0.3068028269	-0.3068478195

Fonte: Elaboração própria

Tabela 3: Descrição de algumas das reduzidas de ordem ímpar

S_{15}	S_{25}	S_{35}	S_{55}	S_{105}	S_{205}
0.6628718504	0.6742859611	0.6794511186	0.6842983158	0.6884524483	0.6907258872
S_{305}	S_{405}	S_{505}	S_{1005}	S_{10005}	S_{100005}
0.6915158635	0.6919171701	0.6921600147	0.6926504097	0.6930972130	0.6931421809

Fonte: Elaboração própria

Na figura 10, fornecemos o comportamento geométrico de suas reduzidas. Depreendemos, de imediato, o caráter oscilatório (e ilimitado) de suas reduzidas.

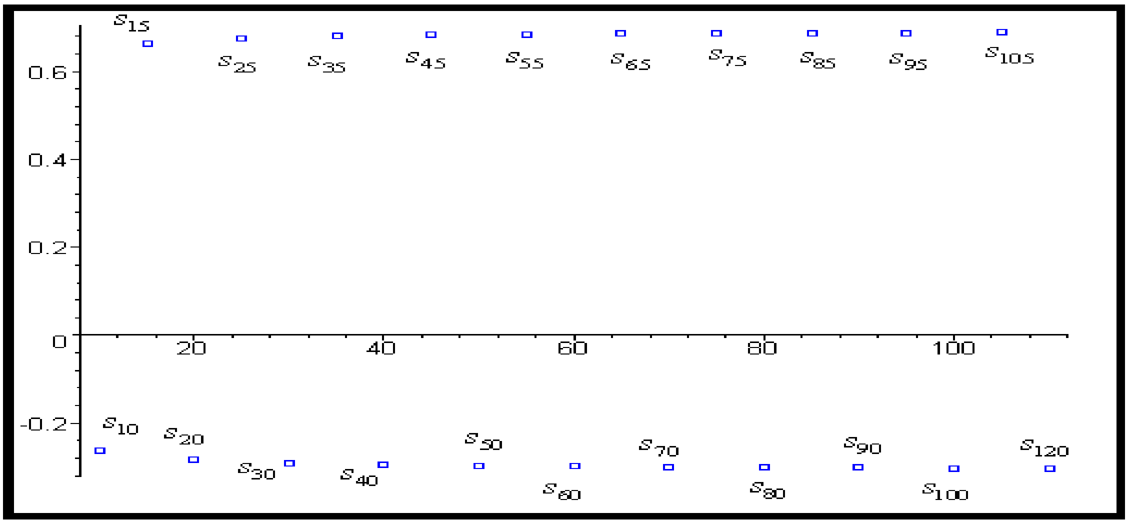

Figura 10. Descrição dos valores assumidos pelas reduzidas de ordem ≤ 170 (elaboração do autor)

Por fim, quando tomamos a série $\sum_{n\geq 1}^{\infty}(-1)^{n+1}[1/\ln(n+1)]$, obtemos, por intermédio do aparato computacional, os seguintes valores numéricos correspondentes às suas reduzidas de ordem par $\cdots \leq s_{40} \leq s_{50} \leq \cdots \leq s_{100} \leq \cdots \leq s_{1000} \leq \cdots \leq 0{,}9242998972$. Com *software*, obtemos seu valor de convergência indicado por $\sum_{n=1}^{k}(-1)^{(n+1)}/\ln(n+1) = 0.9242998972$. Com base na tabela 5, depreendemos que, graças às contribuições da reduzidas do tipo S_{2n+1}, os valores numéricos aumentam (tabela 5) e, o crescimento maior é oriundo da contribuição das reduzidas de ordem S_{2n} (tabela 4). Reparemos que o valor de convergência 0.9242998972 é uma cota superior para a sequência $\{s_n\}_{n\in IN}$.

Tabela 4: Descrição de algumas das reduzidas de ordem par

S_{40}	S_{50}	S_{100}	S_{1000}	S_{10000}	S_{100000}
0.7901007080	0.7974495590	0.8160765750	0.8519331965	0.8700137528	0.8808698168

Fonte: Elaboração própria

Tabela 5: Descrição de algumas das reduzidas de ordem ímpar

S_{45}	S_{55}	S_{105}	S_{1005}	S_{10005}	S_{100005}
0.6628718504	0.6742859611	0.6794511186	0.6842983158	0.6884524483	0.6907258872

Fonte: Elaboração própria

A vantagem da análise do comportamento numérico, que indicamos nesses exemplos particulares, pode ser vislumbrada na inspeção requerida para o entendimento do comportamento das reduzidas da série $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n$, denotadas por $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Com efeito, quando sabemos, *a priori*, sobre a convergência de uma série, segundo a definição que se encontra nos livros, estabelecemos que $\exists \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in IR$ é um número real. Mas isto, em termos do modelo epsilônico, equivale a inferir que $\{s_n\}_{n\in IN}$ a sequência de suas reduzidas é limitada. Todavia, o comportamento do termo geral a_n é determinante no comportamento do valor final da reduzida, sendo um valor numérico positivo ou negativo. Tal possibilidade provoca a oscilação, do resultado final, concernente a cada reduzida.

6. Exploração didática envolvendo a complementaridade dos softwares.

Nesta penúltima seção, tencionamos sublinhar que o caráter de discussão do uso do *software* com vistas ao ensino, não envolve a exigência de um *expert* na condução de mediação didática deste objeto. Com efeito, os comandos explorados no *software Geogebra* envolvem, basicamente, comando de plotagem de gráficos de funções que, quando restritas, na maioria dos casos ao conjunto dos números naturais, devem representar o comportamento do termo geral da série $\sum a_n$. Ademais, quando fazemos uso do *CAS Maple*, de modo semelhante, não exploramos uma sintaxe intricada atinente a esse *software*. Basta observar, por exemplo, no caso da série $\sum_{n\geq 2}^{\infty}[1/n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))]$, identificamos seu termo geral e, o comportamento numérico de suas reduzidas pode ser descrito como segue, de acordo com a sintaxe do *software*:

```
> a:=n->1/(n*ln(n)*ln(ln(n)));

>sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..k)=evalf(sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..30));

>sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..k)=evalf(sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..100));

>sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..k)=evalf(sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..1000));

>sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..k)=evalf(sum(1/(n*ln(n)*ln(ln(n))),n=2..10000));
```

Com base nos procedimentos acima, na prática, obtemos os valores numéricos para as reduzidas $s_{30}=4.637641829, s_{100}=5.113536098, s_{1000}=5.737905389, s_{10000}=6.172909507$.

Para exemplificar, vale comenta que na versão 14, o *CAS Maple* demora alguns segundos para avaliar o valor de $s_{100000}=6.506738618$. E os valores crescentes (que indicam o caráter ilimitado de suas reduzidas), sugerem o que de fato acontece, ou seja, a divergência da série $\sum_{n\geq 2}^{\infty}[1/n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))]$. Que pode ser verificado formalmente, pelo Teste da Condensação de Cauchy (TRENCH, 2003, p.).

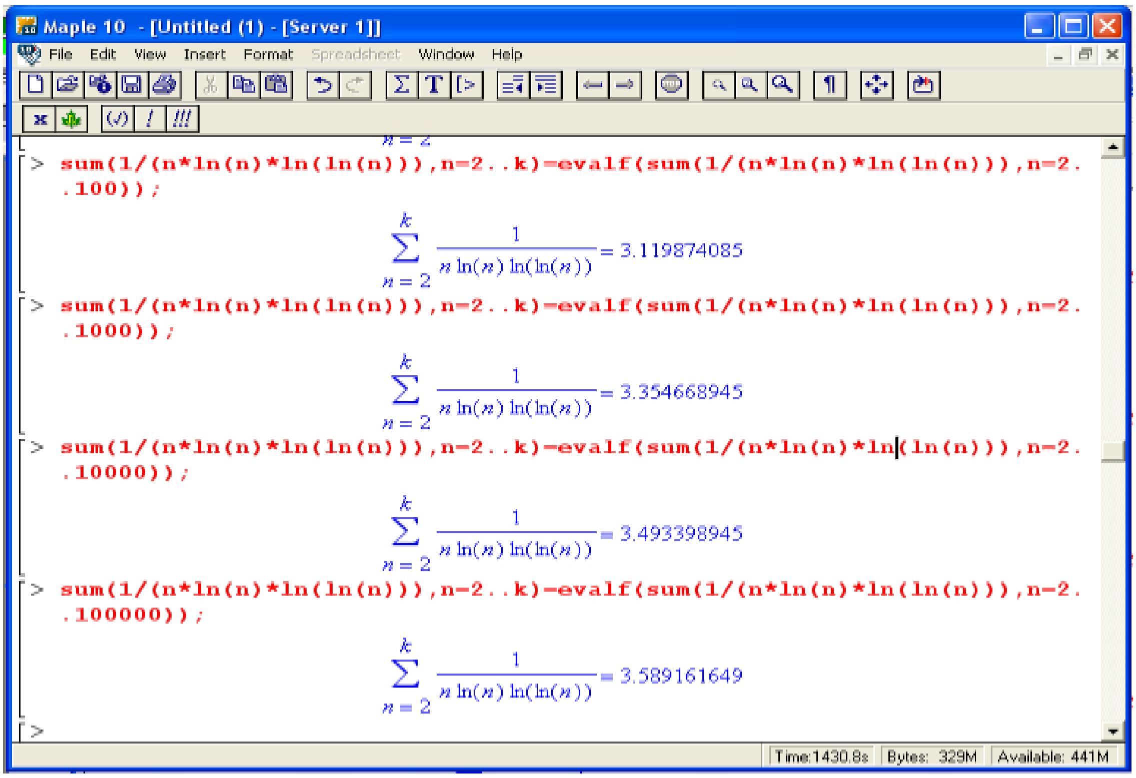

Figura 11. Exemplos de comandos utilizados para avaliar as reduzidas

No caso da série convergente $\sum_{n\geq 1}^{\infty}(n-\sqrt{n^2-1})\big/\sqrt{n(n+1)}$, podemos também usar os seguintes comandos:

> Sum((n-(n^2-1)^(1/2))/(n*(n+1))^(1/2),n=1..10)=sum(1/2^n,n=1..10);

> Sum((n-(n^2-1)^(1/2))/(n*(n+1))^(1/2),n=1..20)=sum(1/2^n,n=1..20);

> Sum((n-(n^2-1)^(1/2))/(n*(n+1))^(1/2),n=1..100)=sum(1/2^n,n=1..100);

Diferentemente dos comandos usados na figura 11, que indicam o comando "**evalf**", observamos os seguintes resultados fornecidos pelo programa:

Tabela 6: Descrição de algumas das reduzidas de ordem 10,20 e 100.

$\sum_{n=1}^{10}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1023}{1024}$	$\sum_{n=1}^{20}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1048575}{1048576}$	$\sum_{n=1}^{100}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1267650600228229401496703205375}{1267650600228229401496703205376}$

Fonte: Elaboração própria.

Mas neste caso, dependendo da série e dos comandos, o programa não fornece exatamente os valores assumidos pelas reduzidas de ordem 10, 20 e 100. Mas, como vemos na tabela 6, acima, valores numéricos fracionários. Com o seguinte comando, obtemos seu valor de convergência que indicamos por $\sum_{n=2}^{k}(n-\sqrt{n^2-1})\big/\sqrt{n(n+1)}=0.2928932188$. A seguinte sintaxe do programa é exigida:

> a:=n->(n-(n^2-1)^(1/2))/(n*(n+1))^(1/2);

> sum(a(n),n=2..k)=evalf(sum(a(n),n=2..infinity));

7. Discussão dos resultados.

Os dados coligidos nas seções anteriores, sistematizados em uma análise documental, permitem a produção das seguintes ilações:

(i) A complexidade de certos critérios de convergência inviabiliza a visualização e entendimento qualitativo do comportamento de uma série;

(ii) O *CAS Maple* permite inferir o comportamento numérico-qualitativo no estudo de séries e constitui forte aliado, no que concerne às limitações do *software Geogebra*;

(iii) Com o *software Geogebra*, exploramos características de convergência do termo geral das mesmas, o que pode anteceder qualquer tipo de uso dos critérios de convergência;

(iv) Podemos antever o comportamento de séries que possuem complexa descrição, com o recurso computacional;

(v) A tecnologia proporciona um entendimento heurístico atinente a este conteúdo.

8. Considerações e recomendações.

Temos que admitir que no estudo da noção de séries infinitas e no estabelecimento de determinados critérios de convergência, sobretudo no contexto da *Análise Real*, deparamos conceitos abstratos que, sem o aparato computacional, restringem o pensamento do aprendiz ao campo abstrato, no qual, lidar com tais entidades abstratas, simbolizadas algebricamente, é a única via e possibilidade de ação.

No rol destes conceitos, evidenciamos em nossa discussão, a noção de *sequência*, de *convergência* e a noção das *reduzidas* $(s_n)_{n\in IN}$ de uma série $\sum a_n$. A noção de sequência $(a_n)_{n\in IN}$, quando considera seu termo geral a_n , pode ser explorada, do ponto de vista matemático e didático, sobretudo, com *software Geogebra*. Como discutimos nas seções anteriores, a monotonicidade, existência e o caráter limitado/ilimitado, podem ser auferidos diretamente, com base numa análise qualitativa do gráfico. E, *a posteriori*, dependendo da situação-problema e do contexto de ensino, o aluno pode ser instigado a uma verificação formal, com o apoio direto do professor.

No que concerne ao que discutimos com base nos critérios de convergência, sugerimos ao professor, a pertinência da conscientização dos aprendizes relativo aos seguintes fatos: (I) tais critérios podem, em determinados casos, indicar o comportamento da série; (II) por intermédio de sua aplicação, desconhecemos o comportamento numérico (e, portanto, qualitativo) de uma série; (III) sem o apoio da tecnologia, dificilmente conseguimos extrair uma interpretação geométrico-numérica.

Com tal preocupação, a introdução dos *softwares* hora discutidos, não podem ser encarados como um elemento de redução do rigor (embora, a falta de rigor é algo indicado na pesquisa de vários matemáticos no passado, segundo Polya (1954)) do tratamento deste objeto conceitual e, sim, como o acréscimos de elementos que podem viabilizar o enlargueçimento do campo idiossincrásico de compreensão do incipiente diante situações distinguidas.

Para concluir e reforçar nosso último argumento, valem as indicações de Caraça (1951, p. 275) quando pontua que “não é sempre fácil, e às vezes é extremamente difícil, averiguar se uma série é ou não convergente; os matemáticos possuem, para isso, uma complicada aparelhagem constituída por uma multidão daquilo a que se chamam critérios de convergência [...]”. Doravante, o mesmo explica ainda que:

> A teoria das séries oferece-nos um dos mais flagrantes exemplos de como as necessidades atuam como aguilhões na criação de conceitos, independentemente de sua criação lógica. Primeiro, é preciso obter resultados e, para isso, criam-se os instrumentos precisos; as preocupações de rigor e de ordenação aparecem mais tarde.

Ora, é justamente esta intenção didática que procuramos desenvolver e descrever neste trabalho. Não assumimos a posição, todavia, de que esta constitui a melhor abordagem, como também, na sabemos se a abordagem formal e rigorosa, além de ser agradável para o professor *expert*, será a mais alvissareira para o incipiente. O fato é que, com a tecnologia, dispomos de rotas alternativas para nossa mediação em sala de aula.

9. Referências

ÁVILA. Geraldo. *Várias Faces da Matemática: tópicos para a licenciatura e leitura geral*. São Paulo: Editora Blucher. 2007.

BAGINI. Giorgio. *Difficulties with series in History in the classroom*. In: FAUVEL, John. & MAANEN, Jan Van. ***History in Mathematics Education***. 2002. p. 82-86.

BARDIN, Laurence. *L'analise de contenu*. Universitaires de France, 1977.

BARTLE, Robert. G. & SHERBERT, Donald, R. *Introduction to Real Analysis*. Third Edition. New York: Hamilton Printing Company. (2000).

BOURCHTEIN, Ludmila. BOURCHTEIN, Andrei. NONBERG, Gabrielle & VENZKE, Cristiane. *Uma hierarquia de testes de convergência de séries baseada no teorema de Kummer*. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**. v. 2, nº 29, 2011, p. 83-107.

BRESSOUD, David. M. *A Radical approach to Real Analysis.* New York: The Mathematical Association of America. 1994.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática. 1951.

EDWARDS, C. H. Jr. *The Historical development of Calculus*. New York: Springer Verlag. 1979.

GUIDORIZZI, Hamilton. L. *Sobre os três primeiros critérios, da Hierarquia de De Morgan, para a convergência ou a divergência de série de termos positivos*. **Matemática Universitária**. Nº 13, 1991. p. 95-104.

HAIRER, E. & WANNER, G. *Analysis by its History*. New York: Springer. 2008.

LIMA, Elon. L. *Análise Real*. v. 1, Rio de Janeiro: SBM. 2006.

LIMA, Elon. L. *Curso de Análise Real*. v. 1, Rio de Janeiro: SBM. 2010.

KRANTZ, Steven. G. *Real Analysis and Foundations*. Second Edition. London: Chapmann. 2004.

POLYA, George. *Mathematics and Plausible Reasoning*. Oxford: Oxford University Press. 1954.

THOMSON, Brian; BRUCKNER, Judith & BRUCKNER, Andrew. *Elementary Real Analysis*. New York: Prentice Hall. 2001.

TRENCH, William. F. *Introduction to Real Analysis*. San Antonio: Pearson Education. 2003.