ANALISE COMPARATIVA DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO NO MERCADO BRASILEIRO

COMPARATIVE ANALYSIS OF OPTIMIZATION MODELS IN BRAZILIAN MARKET

Sérgio Guilherme Schlender
Instituto Federal Farroupilha – IFF – Campus Santa Rosa –RS, Brasil, sergio.schlender1@gmail.com
Marco Antonio da Costa Malheiros
Instituto Federal Farroupilha – IFF – Câmpus Santa Rosa – RS, Brasil, marco.malheiros@iffarroupilha.edu.br

Resumo
O presente trabalho propõe uma análise comparativa dos modelos de otimização no mercado brasileiro. A utilização dos modelos é baseada na substituição da variância pelo Valor em Risco (VaR) e a Perda Esperada (ES) como medida de risco. A análise separa em dois momentos distintos: um dentro da amostra, em retornos diários compreendidos entre janeiro de 2003 a dezembro de 2010; e outro fora da amostra, numa periodicidade diária de retornos de janeiro de 2010 a dezembro de 2013. Como resultados, observa-se que tanto dentro da amostra como no horizonte de investimento de longo prazo fora da amostra, modelos ligados às medidas de risco apresentaram melhores desempenhos, sobretudo em caso de quebra do mercado. Por outro lado, no curto e médio prazos de investimento, as estratégias de mínima-variância e média-variância obtiveram os melhores resultados. Economicamente, o investidor pode se utilizar dos modelos para maior segurança na alocação de seus ativos em períodos turbulentos. Em implicações teóricas, verifica-se a importância da não utilizar excessivamente apenas um único modelo de otimização para a gestão de portfólios.

Palavras-chave: Modelos de Otimização. Medidas de Desempenho.

Abstract
This paper proposes a comparative analysis of optimization models in the Brazilian market. The use of models is based on replacement of variance as measure of risk to Value at Risk (VaR) and Expected Loss (ES). The analysis separates in two different times: in-sample, understood in daily returns between January 2003 and December 2010; and another out-of-sample on a daily basis of returns from January 2010 to December 2013. As results, this paper observe that both, in-sample as the investment horizon out-of-sample long-term, models involved in risk measures presented better performance, especially in case of market crash. On the other side, in short-term and medium-term investment horizons, models of minimum-variance and mean-variance obtained the best results. Economically, the investor can use the models for increased safety in the allocation assets in turbulent periods. In theoretical implications, there is the importance of not using excessively a single optimization model for the management of portfolios.

Key-words: Optimization Models. Performance Measures.

1 INTRODUÇÃO

Em situações de grandes turbulências no mercado financeiro, instituições financeiras se preocupam em alocar e manter os investimentos de seus clientes, minimizando o maior risco possível, com base nas informações geradas a partir de um estimador de risco. Na literatura financeira, essa preocupação foi inicialmente trabalhada por meio do problema clássico de otimização de portfólio proposto por Markowitz (1952). Para compreensão, o problema de otimização é representado em um quadro em que os investidores esperam um certo nível de retorno, mas restritos a um risco associado. Aqui, o risco é comumente mensurado pela variância do portfólio, e nela os investidores procuram aplicar uma determinada posição em relação aos ativos.

Não obstante, a literatura acerca da modelagem de otimização de portfólios têm trabalho nessa relação entre risco e retorno, em destaque na substituição da variância por outro estimador de risco. Isso porque Markowitz (1952) jamais fez menção de qualificar a variância como “risco”, e muitas vezes, a variância não reflete com precisão os gostos de tolerância ao risco do investidor. Ou quando há, a variância não atende a preocupação atrelada àsituações de risco de queda nos retornos dos investimentos.

Para atender essas faltas, modelos de otimização de portfólio compostos por medidas de risco tais como o Valor em Risco (*ValueatRisk*– VaR) e a Perda Esperada (*ExpectedShortfall*– ES)vêm contribuir na avaliação da perda potencial do portfólio, considerando o nível de probabilidade e o tempo específico ao qual o investidor estaria disposto a assumir.

Além disso, apesar dessas e de outras inúmeras alternativas de modelagem de otimização na literatura financeira, gestores e investidores devem analisar o impacto desses modelos por meio de diferentes métricas de comparação e horizontes de investimento. O descuido na utilização dessas ferramentas pode ser prejudicial tanto para eficiência da seleção de ativos como na diversificação do portfólio. O presente trabalho inclui medidas de desempenho baseados em medidas de risco, ampliando a abordagem teórica de comparação de portfólios no mercado brasileiro proposta por Santos (2010) e Santos e Tessari (2012). Motiva-se na escolha das medidas de desempenho de acordo com a presença de outras medidas de risco além da variância (Excesso de Retorno sobre o VaR e Índice de Sharpe Condicional). Por fim, a análise do desempenho dos modelos de otimização em diferentes horizontes de investimento permite que o gestor faça um balanceamento periódico do portfólio e ajude à tomada de decisão de alocação de longo prazo (LI e NG, 2000).

No Brasil, mesmo utilizando métricas de desempenho usuais como retornos médios e índice de Sharpe, e aplicando diversas abordagens na estimação fora da amostra, os trabalhos na comparação de modelos de otimização é ainda muito incipiente. Uma limitação é de que os dados na comparação entre portfólios tradicionais e os baseados em medidas de risco utilizados são restritos apenas aos ativos do mercado acionário, com destaque aos trabalhos de Santos (2010), Araujo (2011), e Santos e Tessari (2012).

Assim, o presente trabalho amplia para dados representativos aos principais fatores de risco de mercado, associados à variabilidade de valores resultantes de condições econômicas, e que considera as principais classes de ativos do mercado brasileiro,realizando-se a comparação desses modelos de otimização de portfólioscom retornos diários das principais classes de ativos do mercado brasileiro no período de 03 janeiro de 2003 a 31 de dezembro de 2013.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 PORTFÓLIO BASEADO EM MEDIDAS DE RISCO

Markowitz (1952) criou uma construção teórica útil para analisar o impacto da volatilidade dos retornos esperados para um portfólio de ativos, na qual a diversificação de um portfólio ajudaria na redução da variabilidade desses retornos. Mais do que isso, trabalhos subsequentes, por meio da variância desses retornos, vincularam esse termo para uma medida de risco do portfólio. No entanto, o autor jamais fez menção de qualificar a variância como "risco", mas como "algo indesejável" que investidores tentam minimizar.

Nesse sentido, uma alternativa apresentada na literatura financeira é mediante a substituição da variância clássica por outras medidas de risco. No portfólio, grande parte dessas medidas visam analisar o risco de perdas dos retornos. Tem surgimento na proposta de alteração da variância feita por Markowitz (1959), com a semi-variância. Enquanto a variância é resultado dos desvios quadráticos da média (retorno do portfólio), com maior peso para os desvios maiores, a semi-variância se caracteriza por contar apenas os desvios quadráticos de valores abaixo dessa média, considerando perdas não desejáveis para o investidor. Mais além, Ogryczak e Ruszczynski (1999) focam a análise semi-momentos centrais que medem o valor esperado de desvios abaixo da média (retorno do portfólio). Há um caso especial, fundamentado na relação entre perdas e valor esperado, conhecido como medida de Momento Parcial Mínimo (BAWA, 1975; FISHBURN, 1977). Sua contribuição está em fundamentar uma das medidas de risco mais utilizadas atualmente, o Valor em Risco (VaR).

Para apresentar essas medidas de maneira simplificada, toma-se a classificação apresentada por Krokhmalet al. (2011), em que apresenta duas classes de medidas principais: as medidas de risco coerentes e as medidas de risco convexas. Dentro dessa classificação, quatro propriedades são exigidas: monotonicidade, invariância sobre translações, homogeneidade positiva e subaditividade. Essas características, conhecidas como os axiomas básicos das medidas de risco, são resultantes de observações do comportamento de investidores, levando em consideração a teoria deutilidade. Artzneret al (1999) apresenta esses quatro axiomas básicos:

> a. Monotonicidade: Se um valor de um portfólio for menor que o valor de outro portfólio em todos os casos possíveis, então o seu risco deve ser maior. Ou seja, quanto maior a perda, mais arriscado é o portfólio.
> b. Invariância sob translação: Se for adicionado um valor a um portfólio, sua medida de risco deve diminuir no mesmo valor. Essa propriedade define que há uma redução de risco do portfólio por alocação.
> c. Homogeneidade positiva: Se o tamanho de um portfólio for dividido por um fator k, mantendo o valor relativo de cada operação contida no portfólio, sua medida de risco deve ser multiplicada pelo mesmo fator k. Assim, o risco é proporcional ao tamanho do portfólio.
> d. Subaditividade: A medida de risco de dois portfólios após ambas serem unificadas não deve ser maior que a soma de suas medidas antes das mesmas se unirem. Dessa forma, é possível reduzir o risco por meio da diversificação.
> e.

As medidas de risco convexas são a classe mais abrangente de medidas de risco. Elas atendem as pressuposições de monotonicidade e translação invariante de Artzneret al. (1999) acima, mas relaxam as propriedades de homogeneidade positiva e subaditividade por uma nova propriedade conhecida como convexidade. Essa propriedade atende a noção de que a diversificação é desejável e não deveria ser penalizada por um fator de agregação, elemento central da homogeneidade positiva, devido ao risco de liquidez inerente. Exemplo de medidas convexas estão as medidas anteriormente citadas. Por outro lado, as medidas de risco coerentes atendem a todas as propriedades de Artzneret al. (1999). Como medidas de risco coerentes, citamos os casos do *Worst Case Riske* o *ExpectedShortfall* (que será apresentado em detalhes na seção 2.3).

2.2 VALOR EM RISCO (VAR)

Entrando nessa ideia para o nível do investidor, o VaR pode ser considerada como uma estimativa de máxima perda potencial que um investidor extaria disposto a assumir, dado um nível de confiança de estimação da otimização de um portfólio de ativos e a duração do investimento (JORION, 2007). A probabilidade de perda estimada é definida sob um quantil de distribuição α, conforme Equação 1.

$$\Pr(Perda > VaR) = \alpha \quad (1)$$

Conforme Stambaugh (1996), o VaR fornece uma administração mais eficaz dos riscos, com definição de um limite de risco e avaliação periódica por parte dos investidores. Para o portfólio, o problema de otimização cuja função objetivo seja a minimização do VaR a um dado nível de confiança, pode ser formulado da seguinte forma nas Equações 2 a 6:

$$\min \alpha \quad (2)$$

Sujeito a:

$$-\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_{it} \leq \alpha \qquad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i = R \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w = 1 \quad (5)$$

$$w \geq 0 \qquad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Onde α é a variável que representa o VaR ao nível de significância β%, N é o numero de ativos que compõe o portfólio, w_i são os pesos dos ativos *i* do portfólio, r_{it} é o retorno do i-ésimo a compor o portfólio. β% é o nível de confiança para o cálculo do VaR e R é o valor esperado dos retornos no portfólio.

Embora o VaR seja uma medida de risco largamente aceita e utilizada, seu uso tem sofrido críticas por parte da comunidade acadêmica. Primeiro, ela é uma medida de risco que não fornece nenhuma informação a respeito das perdas que o excede (acima do quantil), as quais podem ser significativamente grandes. Logo, sua minimização pode conduzir a um indesejável aumento destas perdas. Além disso, em muitas situações o valor de uma medida de risco de um portfólio pode ser maior do que o valor da medida de risco de seus componentes, impossibilitando a diversificação, e não atendendo a propriedade de subaditividade.

2.3 PERDA ESPERADA (ES)

Como visto anteriormente, o VaR apresenta falhas muito impactantes na gestão de portfólios.Na tentativa de corrigir esse problema, surge a Perda Esperada (ES). Desenvolvida por Rockafellar e Uryasev (2002), essa medida pode ser considerada como complementar ao VaR, pois determina o valor esperado de um quebra que seja igual ou exceda o limite calculado pelo VaR Assim, a medida é concentrada nas possibilidades das perdas mais impactantes do portfólio. Essa medida atende a todas as pressuposições propostas por Artzneret al. (1999), tornando-a coerente. O ES de um portfólio *R* com probabilidade αé definido conforme Equação 7.

$$ES_{t+1}^{\alpha} = -E_t(R_{t+1} | R_{t+1} < VaR_{t+1}^{\alpha}). \quad (7)$$

O sinal negativo na expectativa da medida representa a restrição de que as medidas VaR e ES são definidos em números positivos. $R_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t+1} \mu_{i,t+1}$é o retorno do portfólio dos ativos i no período $t+1$. O problema de otimização definido com a medida de risco coerente ES é definido na Equações 8, e está sujeita as mesmas restrições de otimização do VaR.

$$\min ES_{t+1}^{\alpha} \quad (8)$$

3 MÉTODO

3.1 DELINEAMENTO

A fim de comparar os principais modelos de otimização de portfólios, pretende-se utilizar dados representativos aos principais fatores de risco de mercado. Jorion (2007) descreve que o risco de mercado surge de mudanças nos preços de ativos financeiros, resultante à variabilidade de valores resultantes das condições econômicas, entre as quais se pode destacar os riscos de operações sujeitos à variação do câmbio, da taxa de juros, dos preços de ações e de mercadorias (*commodities*). Esses fatores apresentam relevância no desempenho de possíveis portfólios criados pelos investidores, uma vez que são considerados as principais classes de ativos utilizado no mercado.

Assim, serão coletados dados referentes às seguintes cotações: i) taxa média diária do CDI (Certificado de Depósito Interfinanceiro), que é a taxa média dos empréstimos realizados entre instituições financeiras, e é considerada um dos principais indicadores de taxa de juros utilizados no mercado; ii) taxa de câmbio diário, para exprimir o montante de moedas negociada nas relações comerciais ou financeiras entre os agentes do mercado; iii) o índice Ibovespa, que é um portfólio teórico que serve de referência quanto ao desempenho do mercado acionário no Brasil, e; iv) os preços diário da principal *commodity* de exportação do Brasil: a soja.

A coleta dos dados acima será dada em retornos diários compreendidos no período de 02 de janeiro de 2003 a 31 de dezembro 2013, com 3469 observações. A justificativa para a coleta nesse período é dada pela necessidade de verificar o desempenho de diferentes estratégias de portfólios com a presença de importantes crises financeiras, em destaque a crise cambial brasileira entre 2003/2004, do *Sub-prime* de 2007/2008 e da dívida europeia, iniciada em 2010. Nessas crises, o investidor apresenta maior aversão ao risco sob a alocação de ativos e captação de recursos, dado que o mercado apresente forte retração de negociações. Coudert e Gex (2008), ao analisar o impacto das crises sobre os investidores, confirmam essa justificativa, ao verificar que a aversão ao risco aumentou nos meses subsequentes ao período da crise do *Sub-prime*. Além disso, o período compreende períodos de turbulências ocasionadas por outras crises, sobretudo àquelas subsequentes a crise da Zona do Euro em 2010, e propicia uma análise mais cuidadosa sob o desempenho dos portfólios em relação às variações na volatilidade dos ativos.

Após a coleta de dados, o presente trabalho realizará os cálculos dos retornos dos ativos analisados, bem como do retorno e da matriz de covariância do portfólio composto por estes ativos, com base na Equação 1:

$$r_{i,t} = \ln P_{i,t} - \ln P_{i,t-1} \qquad (1)$$

Na Equação 1, $r_{i,t}$ é o log-retorno do ativo i no instante t. $P_{i,t}$ denota o preço do ativo i no instante t e $P_{i,t-1}$ é correspondente ao preço do ativo i no instante $t-1$.

Porém, dado que o portfólio é um conjunto de vários ativos, serão calculados o retorno esperado e a matriz de covariância. O retorno esperado de um portfólio R é representado na Equação 2. Como a amostra dos dados que se pretende coletar é composto por 4 ativos.

$$R = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i + w_c \mu_c + w_{Ibov} \mu_{Ibov} + w_s \mu_s \qquad (2)$$

Na Equação 2, $w_i \mu_i$ é a combinação dos pesos e retornos da taxa média de juros, $w_c \mu_c$ é a combinação entre pesos e retornos da taxa de câmbio, $w_{Ibov} \mu_{Ibov}$ é a combinação entre pesos e retornos do índice Ibovespa, e $w_s \mu_s$ é a relação entre pesos e retornos da *commodity* soja.

Baseado no *trade-off* entre retorno e risco no portfólio, a matriz de covariância é a mais tradicional estimadora de risco. A Equação 3 apresenta essa matriz de covariância, em que a variância dos retornos encontra-se na diagonal da matriz, e o restante dos elementos são atrelados às covariâncias entre os retornos dos ativos.

$$cov = \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & \sigma_{i,j} & \cdots & \sigma_{i,n} \\ \sigma_{j,i} & \sigma_j^2 & \cdots & \sigma_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,i} & \sigma_{n,j} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

3.2 DESCRIÇÃO DOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

A Moderna Teoria do Portfólio de Markowitz (1952) consiste no desenvolvimento de um modelo matemático que otimiza a relação entre a média e a variância dos investimentos, cuja preocupação era envolta sob o desempenho dos investimentos nesta relação para determinar a escolha de um portfólio. Para ele, todo investimento apresenta um retorno esperado (média) e uma variância dos resultados possíveis para este retorno, as quais não são desejáveis (Markowitz, 1952, p. 77). Esse análise é conhecida como modelo de média-variância e é apresentado nas Equações 4 a 8.

$$\min_w V - \frac{1}{\gamma} E(R) \quad (4)$$

onde:

$$R = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \quad (5)$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \quad (6)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad (7)$$

$$w_i \geq 0 \quad (8)$$

Em que R é o retorno esperado do portfólio, w_i é a soma dos pesos do portfólio,μ_ié o retorno esperado de cada ativo e V é a variância do portfólio. Restrição $\sum_{i=1}^{n} w_i$ atribui-se à hipótese de que o investidor irá alocar todos os seus recursos disponíveis no portfólio escolhido. Restrição $w_i \geq 0$ atrela-se às vendas a descoberto, na qual não se permite negociações em ativos aos quais o investidor não possui. Ressalta-se que o modelo segue a preposição de normalidade, em que $R \sim N(\mu_i, V)$.

No entanto, um avanço na otimização de portfólios ocorre ao considerar os investidores totalmente avessos ao risco. Como suposição, define-se que ao escolher entre dois investimentos de mesmo retorno, o investidor sempre escolherá aquele com o menor risco. Assim, os pesos ótimos de um portfólio podem ser obtidos pela minimização da variância do portfólio, conforme Equações 9 a 11.

$$\min_w V \quad (9)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad (10)$$

$$w_i \geq 0 \quad (11)$$

Diferentemente do portfólio de média-variância, o portfólio por mínima-variância não leva em consideração o retorno esperado do portfólio R (Equação 2). Merton (1980) explica que essa não-relevância ao retorno esperado é atrelada à dificuldades na estimação de portfolios de média-variância com o retorno esperado do mercado, devido a presença de outros tipos de riscos, tais como àqueles ligados à taxa de juros ou câmbio, e que pertencem ao risco sistemático ou de mercado.

Outra estratégia é o portfólio igualmente ponderado, também conhecido como portfólio ingênuo, tem como destaque a utilização de restrição dos pesos $w_i = 1/N$, em que N é o número de ativos. Seu objetivo é alocar de maneira uniforme os ativos aplicados pelo investidor. Esse modelo de seleção de ativos pode ser usado como *benchmarking* para monitoramento de resultados, dado sua facilidade de implementação e não exigência de análise de médias e variâncias amostrais.

Por outro lado, uma alternativa na otimização e alocação de ativos dentro da gestão de portfólio é mediante a substituição da variância clássica por outras medidas de risco. Dessa forma, apresenta-se o portfólio baseado no Valor em Risco (VaR), cuja medida é uma estimativa de máxima perda potencial que um investidor extaria disposto a assumir, dado um nível de confiança de estimação da otimização de um portfólio de ativos e a duração do investimento (JORION, 2007). A probabilidade de perda estimada é definida sob um quantil de distribuição α, conforme Equação 12.

$$\Pr(Perda > VaR) = \alpha \quad (12)$$

Para o portfólio, o problema de otimização cuja função objetivo seja a minimização do VaR a um dado nível de confiança, pode ser formulado da seguinte forma nas Equações 13 a 17:

$$\min \alpha \quad (13)$$

sujeito a:

$$-\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \leq \alpha \qquad t = 1, \ldots, T \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i = R \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w = 1 \quad (16)$$

$$w \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, N \quad (17)$$

Onde α é a variável que representa o VaR ao nível de significância β%, N é o numero de ativos que compõe o portfólio, w_i são os pesos dos ativos *i* do portfólio, μ_i é o retorno do i-ésimo a compor o portfólio. β% é o nível de confiança para o cálculo do VaR e R é o valor esperado dos retornos no portfólio.

Contudo, embora o VaR seja uma medida de risco largamente aceita e utilizada, seu uso tem sofrido críticas por parte da comunidade acadêmica, seja por não fornecer nenhuma informação a respeito das perdas que o excede (acima do quantil), as quais podem ser significativamente grandes, como também o problema de que sua minimização pode conduzir a um indesejável aumento destas perdas.

Em vista disso, surge a Perda Esperada (ES). Desenvolvida por Rockafellar e Uryasev (2002), essa medida pode ser considerada como complementar ao VaR, pois determina o valor esperado de um quebra que seja igual ou exceda o limite calculado pelo VaR Essa medida é concentrada nas possibilidades das perdas mais impactantes do portfólio. Essa medida atende a todas as pressuposições propostas por Artzneret al. (1999). O ES de um portfólio *R* com probabilidade αé definido conforme Equação 18.

$$ES_{t+1}^{\alpha} = -E_t(R_{t+1} | R_{t+1} < VaR_{t+1}^{\alpha}). \quad (18)$$

O sinal negativo na expectativa da medida representa a restrição de que as medidas VaR e ES são definidos em números positivos. $R_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t+1} \mu_{i,t+1}$é o retorno do portfólio dos ativos i no período $t+1$. O problema de otimização definido com a medida de risco coerente ES é definido na Equação 19, e está sujeita as mesmas restrições de otimização do VaR.

$$\min ES_{t+1}^{\alpha} \quad (19)$$

3.3 ESTIMAÇÃO E COMPARAÇÃO DOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

Serão apresentadas as etapas para a estimação e comparação desses portfólios, baseados nos modelos de otimização apresentados anteriormente. Para a estimação, o Quadro 1 apresenta esses modelos, com diferentes funções-objetivo e restrições. Enquanto as funções-objetivo representam o problema de otimização que o agente assume, as restrições limitam esse problema nas peculiaridades a serem exploradas pelos modelos.

QUADRO 1 – Modelos de otimização, com respectivos função-objetivo e restrições. Fonte: elaborado pelos autores

Modelos	**Função-Objetivo**	**Restrições**
M_1. Igualmente Ponderada		$w_i = 1/n$
M_2. Média Variância	$\min_w cov - \frac{1}{\gamma} E(R)$	$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1; w_i \geq 0$
M_3. Minima –Variância	$\min_w cov$	$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1; w_i \geq 0$
M_4. Mínimo – VaR	$\min \alpha$	$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1; w_i \geq 0;$ $-\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_{it} \leq \alpha$
M_5. Mínimo – ES	$\min ES_{t+1}^{\alpha}$	$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1; w_i \geq 0;$ $-\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_{it} \leq ES_{t+1}^{\alpha}$

Após, serão comparados os modelos de otimização por meio de diferente índices de performance e em diferentes horizontes de investimento. Inicialmente, analisará a performance dentro de uma amostra de retornos, considerando o impacto de crises associados aos fatores de risco: a crise cambial, em 03 de janeiro de 2003, e a crise da zona do Euro, em 31 de dezembro de 2010, totalizando 1733 observações. Após, por meio de um *backtesting*, a comparação de modelos se dará em diferentes horizontes de investimento. O *backtesting* estima o desempenho de determinado modelo na hipótese de que ele tenha sido utilizado em determinado período passado. O período de comparação se dará na ocorrências subsequentes à crise do Euro, entre 04 de janeiro de 2010 a 31 de dezembro de 2013, com 990 observações. Considera-se os mesmos pesos e matriz de covariância tanto dentro como fora da amostra. Dado a estimação dos retornos e da matriz de covariância de cada uma dos modelos, será analisado a melhor relação entre risco e retorno por meio das medidas de desempenho.

As medidas de desempenho de portfólios são intimamente ligadas ao grau de ajustamento do risco dos modelos estimados. Seguindo a construção teórico do presente trabalho, essas medidas são agrupadas com base no Valor em Risco e a Perda Esperada (ES).O primeiro índice utilizado é o índice de Sharpe (*Sharpe Ratio* - SR). É a medida de desempenho mais comumente usada na literatura financeira. Sharpe (1964) estabelece um *trade-off* entre retorno e risco, conforme Equação 20.

$$SR = \frac{R - r_f}{\sqrt{V}} \qquad (20)$$

Na Equação 20, $R = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$ é o retorno esperado do portfólio, r_f é a taxa livre de risco, e $\sqrt{V}$ é o desvio-padrão do portfólio, dado que $V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$. Como os investidores avessos ao risco preferem retornos elevados e baixa volatilidade, a alternativa com o Índice de Sharpe mais elevado deve ser considerada na comparação de portfólios (Scott e Horvath, 1980).

Porém esses indicador não consegue distinguir entre ganhos e riscos de quebra. Para tanto, considera-se o Valor em Risco (VaR) como indicador de risco no desempenho dos portfólios. Quando o VaR é utilizado para avaliar a performance, é possível estabelecer uma relação com outras medidas. Uma medida de desempenho, desenvolvida por Dowd (2000), faz uma relação com o Índice de Sharpe (SR) na avaliação de performance de portfólios, e é conhecida como Excesso de Retorno sobre o VaR, na qual tem representação na Equação 21.

$$SR_{VaR} = \frac{r_i^d - r_f}{VaR_{\beta\%}} \qquad (21)$$

Na Equação 21, r_i^d é o retorno esperado sob a distribuição empírica, dado as realizações do VaR como medida de risco e seu nível de confiança $\beta\%$. Se uma amostra apresentar 100 observações de retorno, e considerando 5% dos menores retornos na estimação do VaR, a distribuição empírica será composto por 95 observações.

Contudo, dado a importantes críticas nas propriedades teóricas de uma medida de risco como o VaR, é possível estabelecer avaliação da performance de portfólios com Índice de Sharpe Condicional (*Conditional Sharpe Ratio* – CSR), representada na Equação 22.

$$SR_{ES} = \frac{r_i^d - r_f}{ES_{\beta\%}} \qquad (22)$$

Essa medida avalia quão profunda é a perda do investidor em caso de uma quebra do mercado, e não mais para estimar um limite a partir do qual pode-se falar de uma quebra, como proposto pelo SR_{VaR}.

Por fim, considera-se também a existência de diferentes horizontes de investimento t_j. Um horizonte de investimento pode ser denominado como o tempo necessário na obtenção do melhor retorno de um determinado portfólio. Quanto menor o horizonte de investimento, maior tende ser o risco associado à diversificação dos ativos no portfólio. Isso ocorre devido à proporcionalidade dos parâmetros da média μ e variância cov com o horizonte de investimento $t_j = 1,2,3,\ldots,n$, já que esses parâmetros se ajustam quando o horizonte de investimento é maior (Lee et al., 1990). Proposto por Markowitz (1952), os horizontes de investimentos modificam cada função-objetivo e restrições dos modelos propostas pelo trabalho em diferentes períodos de análise.

Para o presente trabalho, considerou-se três horizontes de investimento t_j. Há um recorte na amostra para a determinações desses períodos de investimento. Determina-se períodos de 6 meses (t_1), 24 meses (t_2) e 48 meses (t_3), tendo como ponto de partida a crise europeia de 2010. O objetivo é analisar o comportamento das classes de ativos dentro de um cenário de turbulência, a fim de verificar o padrão de desempenho dos modelos de otimização.

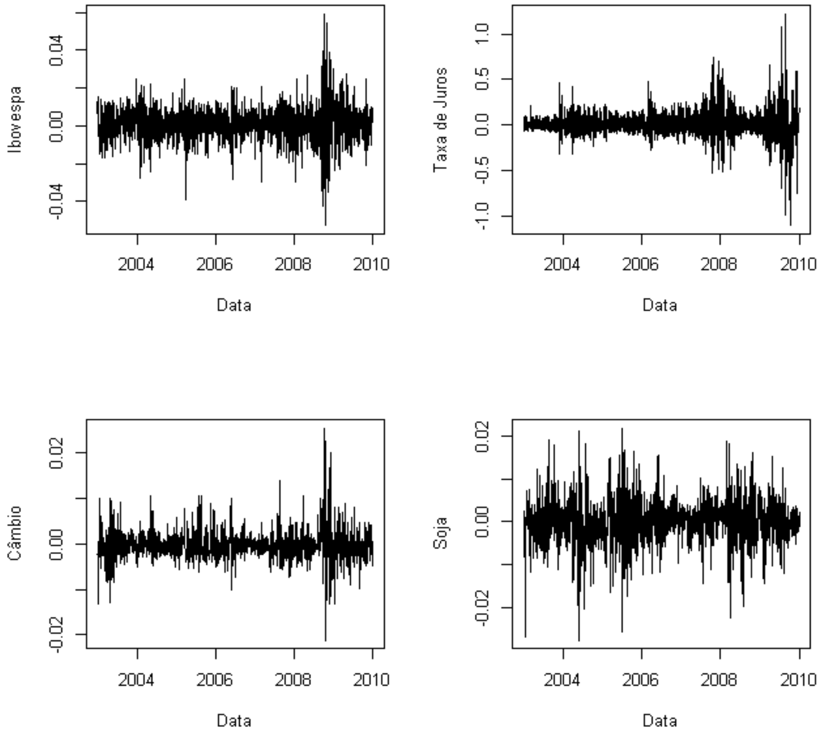
Toda a computação do retorno e a matriz de covariância dos portfólios, de acordo com as funções-objetivo e restrições exigidas pelos modelos, será realizada no programa estatístico Microsoft® Excel. A utilização desse programa se deve a sua facilidade de manuseamento, bem como fácil resposta dos parâmetros estimados pelos modelos de otimização.

4 RESULTADOS

Para comparar os principais modelos de otimização de portfólios, utiliza-se dados representativos aos principais fatores de risco de mercado, a saber: o índice do portfólio de ações Ibovespa, a taxa referencial de juros, a taxa de câmbio, e o preço da soja. Considera-se o impacto dentro de uma amostra representativa bem como um *backesting*em diferentes horizontes de investimento fora da amostra.

Dentro da amostra, A Figura 1 apresenta os retornos desses fatores de risco de mercado O período de análise corresponde a uma conjectura econômica que se inicia após a crise cambial do Real em 2003, e termina com a crise europeia em 2010.Observando os retornos dos fatores de risco na Figura 1, confirma-se forte oscilação nos agrupamentos de volatilidade a partir da crise do *sub-prime*de 2008 e denota uma instabilidade nos preços do Ibovespa, da taxa de juros e da taxa de câmbio, especialmente para retornos negativos.

FIGURA 1 – Retorno dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2003 a dezembro de 2010. Fonte: elaborado pelos autores



Para a análise do desempenho dos modelos de otimização dentro da amostra representativasão apresentados os pesos e tabela comparativa dos modelos com base em diferentes medidas de desempenho.A Tabela 1 apresenta os pesos dos ativos utilizados no portfólio para cada um dos modelos de otimização proposto pelo presente trabalho. Nela, o modelo M_1 corresponde ao modelo Igualmente Ponderado, O modelo M_2 corresponde ao modelo tradicional de média-variância de Markowitz, os modelos ligados à medidas de risco de Valor em Risco M_4 e Perda Esperada M_5.

Tabela 1 – Pesos dos ativos do portfólio de acordo com os modelos de otimização

Pesos dos ativos	**Modelo M_1**	**Modelo M_2**	**Modelo M_3**	**Modelo M_4**	**Modelo M_5**
Bovespa	0,2500	0,1073	0,1073	0,0989	0,1185
Taxa de juros	0,2500	0,1139	0,1139	0,0742	0,1003
Câmbio	0,2500	0,5659	0,5659	0,5786	0,5907
Soja	0,2500	0,2129	0,2129	0,2483	0,1905

Fonte: elaborado pelos autores.

Tabela 2 – Desempenho dentro da amostra para diferentes modelos de otimização

Performance	**Modelo M_1**	**Modelo M_2**	**Modelo M_3**	**Modelo M_4**	**Modelo M_5**
R (%)	0,0186	0,0172	0,0172	**0,0197**	0,0186
Risco (%)	0,7228	**0,5814**	**0,5814**	0,5877	0,7228

SR (%)	1,7250	2,0387	2,0387	**2,3554**	1,7250
$\mathrm{SR}_{\mathrm{VaR}}$ (%)	2,5680	2,9594	2,9594	**3,3574**	2,5680
$\mathrm{SR}_{\mathrm{ES}}$ (%)	2,5691	2,9636	2,9636	**3,3628**	2,5691

Fonte: elaborado pelos autores.

Com base na ponderação estabelecida nos modelos de otimização, analisa-se o desempenho desses modelos em diferentes medidas, conforme Tabela 2. Os resultados obtidos na Tabela 2 apontam que dentre os retornos médios dos modelos, o que se sai melhor é o modelo M_4, atrelado aos ganhos com o VaR. Em seguida vem o modelo baseado na Perda Esperada M_5, e o modelo ingênuo M_1. Quando considerado a performance de maior retorno para todos os modelos, o modelo de otimização com o VaR é superior. Por outro lado, o que se apresentou como pior retorno médio são os modelos tradicionais de média-variância M_2 e mínima-variânciaM_3. No entanto, são estes últimos modelos que apresentam o menor risco. Assim, percebe-se, por exemplo, que um investidor totalmente avesso ao risco consegue atribuir melhor seu problema de minimização por meio desses modelos de otimização, porém, não necessariamente são o mais desejáveis na relação com o retorno.

Tal relação é apresentada com maior clareza ao atribuir a análise sob outros quatro estimadores de desempenho. Quanto ao índice de Sharpe, o modelo M_4 obtém melhor relação entre o risco e retorno. Além de estar presente entre os menores níveis de risco, o modelo consegue obter retornos médios acima dos demais.

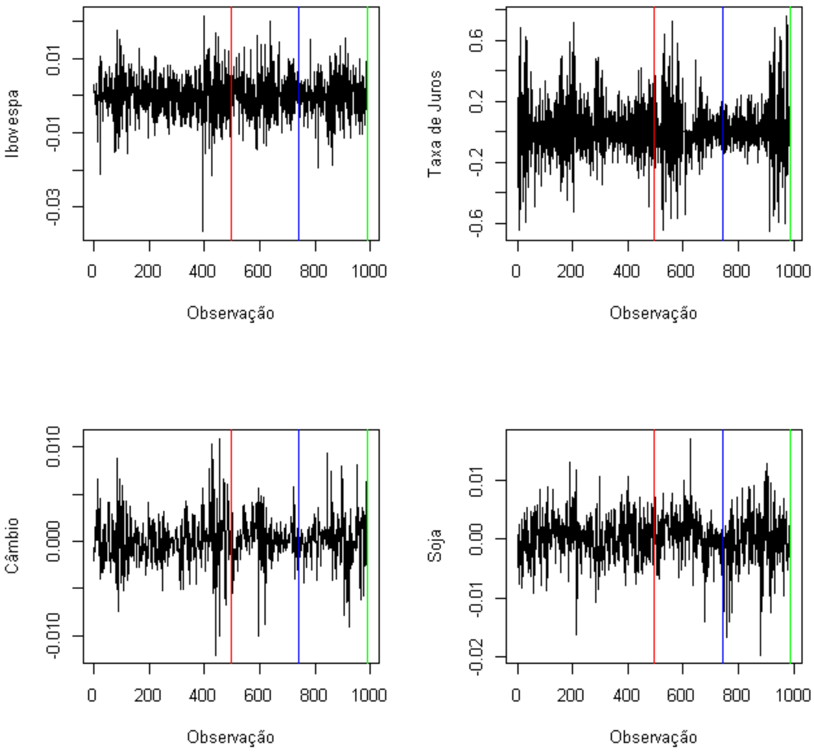
Porém, a estimativa utilizada na comparação entre risco e retorno até aqui não apresenta ganhos e risco em caso de quebra do mercado. Diante disso, a utilização do Excesso de Retorno sobre o Sharpe $\mathrm{SR}_{\mathrm{VaR}}$ e o índice de Sharpe condicional ($\mathrm{SR}_{\mathrm{ES}}$) na Tabela 2. Apesar de ser usado para evitar o uso excessivo de um determinado modelo de otimização, as medidas relacionam mais uma vez o modelo M_4 como melhor performance entre os modelos.

Assim, o modelo de otimização baseado nos ganhos com o VaR,M_4é o que melhor determina a alocação de recursos entre os fatores de risco de mercado dentro da amostra estudada. Diversos trabalhos, como as de Ribeiro e Ferreira (2005), Martins et al (2011), Gaio e Pimenta Junior (2012), verificaram a boa performance de ativos e portfólios com a métrica do VaR. No entanto, pretende-se saber se esse padrão de desempenho ocorre dentro de diferentes horizontes de investimento.

Para realizar as estimações e comparação fora da amostra, apresentam-se as características dos principais ativos utilizados no portfólio. Para tanto, são delineados na Figura 2 os retornos diários do Ibovespa, da taxa de juros, da taxa de câmbio, e da soja. As linhas verticais coloridas representam os horizontes de investimento em análise, considerando: em vermelho, o horizonte de investimento t_1, de 12 meses; em azul, o horizonte de investimento t_2, de 24 meses, e; em verde, o horizonte de investimento t_3, de 48 meses.

Conforme Figura 2, verifica-se agrupamentos de fortes oscilações nos retornos a partir da crise da Europa em 2010 e confirma um período de instabilidade nos preços do Ibovespa, da taxa de juros e da taxa de câmbio, especialmente para retornos negativos. Os *clusters* de volatilidade de todos os retornos até a observação 200 representa o impacto inicial dessa crise nesses fatores de risco do mercado. Para o Ibovespa, a taxa de juros, e a taxa de câmbio, as informações relacionadas à austeridade dos países europeus, sobretudo na crise financeira da Grécia em agosto de 2011, propicia fortes oscilações como se vê no *clusters*de volatilidade entre as observações 400 e 600. E para todos os retornos, em meio a incerteza do sistema financeiro, o advento da crise financeira no Chipre em abril de 2013 corresponde a mais um novo *cluster* de volatilidade a partir da observação 800.

FIGURA 2 – Retorno dos fatores de risco de mercado Ibovespa, taxa referencial de juros, taxa de câmbio e preço à vista da soja de janeiro de 2010 a dezembro de 2013. Fonte: elaborado pelos autores



Para análise de comparação na Tabela 3, considera-se o comportamento dos modelos com os mesmos riscos atribuídos dentro da amostra, a fim de verificar se as métricas de otimização realizadas pelos modelos são consistentes em diferentes períodos de análise.

Tabela 3 – Desempenho fora da amostra para diferentes modelos de otimização

Período t_1 Performance	**Modelo M_1**	**Modelo M_2**	**Modelo M_3**	**Modelo M_4**	**Modelo M_5**
R (%)	**0,0367**	**0,0367**	-0,0477	-0,0151	-0,0532
Risco (%)	0,7228	**0,5814**	**0,5814**	0,5877	0,7228
SR (%)	0,0508	**0,0631**	-0,0820	-0,0257	-0,0736
SR_{VaR} (%)	-1,3786	-1,5683	**3,1962**	0,7382	3,0778
SR_{ES} (%)	-1,8501	-2,4608	**3,9678**	1,2379	3,9495
Período t_2 Performance	**Modelo M_1**	**Modelo M_2**	**Modelo M_3**	**Modelo M_4**	**Modelo M_5**
R (%)	**0,0027**	**0,0027**	-0,0508	-0,0558	-0,0475
Risco (%)	0,7228	**0,5814**	**0,5814**	0,5877	0,7228
SR (%)	0,0037	**0,0046**	-0,0874	-0,0949	-0,0657
SR_{VaR} (%)	0,1524	**0,1886**	-3,9740	-3,9904	-3,7036
SR_{ES} (%)	0,1923	**0,2721**	-5,6817	-5,4578	-5,1974
Período t_3 Performance	**Modelo M_1**	**Modelo M_2**	**Modelo M_3**	**Modelo M_4**	**Modelo M_5**

R (%)	-0,0002	0,0107	0,0107	0,0107	**0,0115**
Risco (%)	0,7228	**0,5814**	**0,5814**	0,5877	0,7228
SR (%)	-0,0003	**0,0184**	**0,0184**	0,0182	0,0159
$\mathrm{SR}_{\mathrm{VaR}}$ (%)	-0,0287	3,1004	3,1004	3,0739	**3,3263**
$\mathrm{SR}_{\mathrm{ES}}$ (%)	-0,0202	1,8618	1,8618	1,8692	**2,0123**

Fonte: elaborado pelos autores.

Assim sendo, estimando os retornos médios, verifica-se redução ao longo dos horizontes de curto (t_1)e médio (t_2)prazos na maioria dos modelos, o que confirma o impacto de retornos negativos dos ativos na análise de desempenho dos portfólios. Além disso, os modelos de otimização estimados, com exceção dos modelos M_1 e M_2, apresentam retornos médios negativos nesses períodos de análise. Diferentemente do ocorrido na análise dentro da amostra, verifica que o cenário turbulento decorrente da crise europeia contribuiu esse tipo de comportamento.

No entanto, ao considerar um horizonte mais abrangente (t_3), os retornos médios dos modelos de otimização, com exceção do método ingênuo M_1, conseguem equilibrar para retornos positivos, melhorando a performance dos indicadores. Com a adequação em um maior número de observações, verifica-se que o modelo baseado em outras medidas de risco, em destaque a Perda Esperada M_5, permite melhor retorno médio no período. Esse resultado vem ao encontrado da melhor performance desse modelo na comparação feita por Araújo (2011) em portfólios de investimentos formadas por ações da BMF&Bovespa.

Por outro lado, ao estimar o desempenho dentro da relação entre risco e retorno dos modelos, verifica-se que os retornos médios têm impacto considerável nos índices de Sharpe (SR). Nos horizontes t_1e t_2, apenas os modelos M_1 e M_2 apresentam razões positivas, com melhor desempenho do portfólio de média-variância. Quando considerado a performance no longo prazo t_3, a razão do portfólio de média-variância M_2 e de mínima-variância M_3 obtiveram os melhores resultados.

Considera-se, no entanto, a estimativa em caso de quebra do mercado. Isso é importante por que o cenário analisado inclui *clusters* de volatilidades decorrentes de crises financeiras sistêmicas. Diante disso, a utilização do Excesso de Retorno sobre o Sharpe $\mathrm{SR}_{\mathrm{VaR}}$ faz-se necessária. O estimador atenta para a utilização das métricas tradicionais M_2 e M_3 para o curto e médio prazos, respectivamente. Porém, analisando o longo prazo, verifica-se que o uso excessivo desses modelo de otimização não necessariamente leva aos melhores limites de ganhos e risco, uma vez que a presença de outro modelo de otimização, baseado na Perda Esperada M_5, denota melhor performance.

Por fim, considerando o quão profunda é o impacto com uma quebra do mercado, analisa-se a performance das métricas por meio do índice de Sharpe condicional $\mathrm{SR}_{\mathrm{ES}}$. Assim como ocorrido no Excesso de Retorno sobre o Sharpe, as métricas de mínima-variância e média-variância obtém, respectivamente, melhores estimativas no curto e médio prazos. No entanto, considerando o efeito a longo prazo, modelos atrelados a medidas de risco substitutivas à variância, em destaque o Valor em Risco M_4 e a Perda Esperada M_5, tornam-se mais adequadas.

Em comparativo à analise realizada dentro da amostra, ao considerar o impacto na relação entre retorno e medida de risco (SR, $\mathrm{SR}_{\mathrm{VaR}}$, $\mathrm{SR}_{\mathrm{ES}}$), verifica-se que o modelo M_5 apresentou os melhores resultados. Contudo, considerando os horizontes de investimento, esse modelo denota melhorperformancefrente aos modelos tradicionais apenas no horizonte de investimento de longo prazo t_3. Isso ocorre porque métricas tradicionais como a média-variância e a mínima-variância, tem destaque na estimativa de curto e médio prazo, o que corrobora com os resultados obtidos por Santos e Tessari (2012). Porém, a presença de melhor performance em outros modelos de otimização, em destaque aqueles baseados nas medidas de risco como o VaR e o ES, amplia a preocupação de Veiga (2012)com a variação da composição dos ativos ao longo dos investimentos, uma vez que se percebe a falta de consistência ao longo prazo quando o investidor se apropria de um único modelo para a alocação e diversificação de ativos.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho propõe uma análise comparativa dos modelos de otimização tradicionais e baseados em diferentes medidas de risco por meio de diferentes horizontes de investimento no mercado brasileiro.

Como resultado, observa-se que tanto dentro da amostra como nos horizontes de investimento de longo prazo fora da amostra, modelos ligados à medidas de risco apresentaram melhores desempenhos, sobretudo em caso de quebra do mercado (com os índices de excesso de retorno sobre o VaR e o índice e Sharpe Condicional). No curto e médio prazos de investimento, as estratégias de mínima-variância e média-variância obtiveram os melhores resultados. Economicamente, o investidor pode ter com esses modelos maior segurança na alocação de seus ativos em períodos turbulentos, tais como se diagnostica nos retornos obtidos fora da amostra. Em implicações teóricas, verifica-se a importância da não utilizar excessivamente apenas um único modelo de otimização para a gestão de portfólios de ativos. O desempenho nesses modelos corrobora com o encontrado no mercado acionário por Thomé Neto et al. (2011), Santos e Tessari (2012) e Rubesam e Beltrame (2013).

A substituição da variância por medidas de risco com o Valor em Risco e a Perda Esperada permitiu bons desempenhos considerando uma gama maior de observações, tanto dentro da amostra como no horizonte de longo prazo. Verifica-se que, apesar dos pesos do portfólio de medidas de risco e dos modelos tradicionais serem parecidos, retornos médios maiores dos modelos baseados no VaR e no ES fazem com que tenham melhor desempenho. Esse resultado corrobora com o trabalho apresentado por Araújo (2011), que realizou a comparação entre o ES e a média-variância em ações da Bolsa.

Como limitação, o uso de horizontes de investimento proposto por Markowitz (1952) na análise fora-da-amostra, apesar de contributiva para a comparação dos modelos, apresenta limitações por avaliar a performance de seu portfólio sob um período fixado. Na literatura, diferentes perspectivas para sua determinação são debatidas e sugeridas para estudos futuros, tais como abordagens por reamostragens de um conjunto de observações fora da amostra (Hatemi-j e Roca, 2006), a aplicação de horizonte rolante de DeMiguel e Nogales (2009), no qual determina uma "janela móvel" com número fixo de observações, ou mesmo a introdução de *waveletts* na estimação dos prazos de investimento, proposto por In et al. (2011).

Por fim, conclui-se que modelos de otimização vinculados ao VaR e ES são mais ligados à investidores mais avessos ao risco, e as modelagens tradicionais como a média-variância e a mínima-variância atrelados aos investidores menos avessos ao risco. No entanto, Veiga (2012) atenta para as diferentes composições de ativos ao longo do tempo em detrimento do uso de um único modelo de otimização. Nesse trabalho, percebe-se que essas modificações dos ativos, associados à volatilidade do mercado, altera o desempenho desses modelos, como nos cenários apresentados pelos horizontes de investimentos. Portanto, sugere-se a contínua utilização da comparação conjunta desses modelos sob diversas peculiaridades definidas pelos índices de desempenho, bem como diferentes perfis de aversão ao risco separados pelos horizontes de investimento.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, A. C. *Comparação entre métricas de risco para otimizar carteiras de investimentos em ações*. 2011. 157 p. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade de São Paulo. 2011.

ARAUJO, M. V. *Seleção dinâmica de portfólios em média-variância com saltos markovianos*. 2007. 146 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.; HEATH, D. *Coherent measures of risk*.Mathematical Finance, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.

BAWA, V. S. *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects*.Journal of Financial Economics, v. 2, pp. 95–121, 1975.

COSTA, O. L. V.; NABHOLZ, R. B.. *Otimização robusta de portfólios utilizando desigualdades matriciais lineares*. SbaControle e Automação, v.15, n.1, p. 41-52, 2004.

COUDERT, V.; GEX, M.*Does risk aversion drive financial crises? Testing the predictive power of empirical indicators*.Journal of Empirical Finance, v.15, n.2, 167-184, 2008.

DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J. *Portfolio selection with robust estimation*.Operations Research, v. 57, n.3, p. 560-577, 2009.

DOWD, K. *Adjusting for risk: an improved sharpe ratio*. International Review of Economics and Finance, v. 9, n. 3, p. 209-222, 2000.

FISHBURN, P. C. *Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns*. The American EconomicReview, v. 67, pp. 116–126, 1977.

GAIO, L. E.; PIMENTA JUNIOR, T. *Value-at-Risk da carteira do Ibovespa: uma análise com o uso de modelos de memória longa*. Gestão e Produção, v. 19, n. 4, 2012.

HATEMI-J, A.; ROCA, E.*A re-examination of international portfolio diversification based on evidence from leveraged bootstrap method*. Economic Modelling v. 23, n.6, p. 993–1007, 2006.

IN, F.;KIM, S.; MARISETTY, V.; FAFF, R. *Analyzing the performance of managed funds using the wavelet multiscaling method*. Review Quantitative Finance Accounting, v. 31, n.1, p. 55-70, 2008.

JORION, P. *Value-at-Risk: The new benchmark for managing financial risk*. McGraw Hill, 3rd edition, 2007. 600 p.

KROKHMAL, P.; ZRAZHEVSKY, G.; URYASEV, S. *Modeling and optimization of risk*.Surveys in Operations Research and Management Science, v. 16, pp. 49–66, 2011.

LEE, C.F.; WU, C.; WEI, K.C.J.*The heterogeneous investment horizon and the capital asset pricing model: theory and implications*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, v. 25, n.3, p. 361–376, 1990.

LI, D.; NG, W. *Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation*. Mathematical Science, v. 10, n. 3, p. 387-406, 2000.

MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection*. Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

OGRYCZAK, W.; RUSZCZYNSKI, A.*From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures*. EuropeanJournalofOperationalResearch, v. 116, pp. 33–50, 1999.

RIBEIRO, C. O.; FERREIRA, L. A. S. *Uma contribuição ao problema de composição de carteiras de mínimo valor em risco*. Gestãoe Produção, v. 12, n. 2, Aug. 2005 .

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. *Conditional value-at-risk for general loss distributions*.Journal of Banking and Finance, v. 26, n. 7, p. 1443–1471, 2002.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. *Deviation measures in risk analysis and optimization*. Technical Report 2002-7. ISE Department, University of Florida. 2002.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. *Optimality conditions in portfolio analysis with general deviation measures*. Mathematical Programming, v. 108, pp. 515–540, 2006.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. *Risk tuning with generalized linear regression.MathematicsofOperationsResearch*.v. 33, pp. 712–729, 2008.

RUBESAM, A.; BELTRAME, A.L. *Portfólios de Variância Mínima no Brasil*. Revista Brasileira de Finanças, v. 11, n. 1, March 2013, pp. 81–118.

SANTOS, A. A. P. *The out-of-sample performance of robust portfolio optimization*.Revista Brasileira de Finanças, v. 8, n.2, p. 141–166, 2010.

SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. *Técnicas quantitativas de otimização de portfólios aplicadas ao mercado de ações brasileiro*. RevistaBrasileira de Finanças, v. 10, n. 3, p. 369-393, 2012.

SCOTT, R.C.; HORVATH, P. A.*On the direction of preference for moments of higher order than the variance*. The Journal of Finance, v. 35, n.4, p. 915–919, 1980.

SHARPE, W. F., ALEXANDER, G. J., BAILEY, J. V. *Investments*. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995, 1058 p.

SHARPE, W.F. *Capital asset prices*.The Journal of Finance, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

STAMBAUGH, F. *Risk and Value-at-Risk*.European Management Journal, v. 14, n. 6, p. 612–621, 1996.

THOMÉ NETO, C.; LEAL, R.; ALMEIDA, V. (2011). *Um índice de mínima variância de ações brasileiras*. Economia Aplicada, v. 15, n. 4, p. 535-557.

VEIGA, I. E. B. C. *Otimização de uma carteira de swaps de energia elétrica no Brasil, usando a medida ômega com restrição de CVaR*. 2012. 87 p. Dissertação (Mestrado em Administração). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2012.